سلسلة البكالوريا بين يديك

BAC

محمد صابور

العد والاحتمالات

100 تمرين تطبيقي

البرنامج الجديد

محمد صابور

العد و الاحتمالات

100تمرين تطبيقي

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات – تقني رياضي

البـرنامـج الـجديد

رقم الإيداع القانوني : 2008 - 1785

ردمك ISBN : 978-9947-0-2256 -6

دار المفيد للنشر و التوزيع ـ عين مليلة

032 – 45 – 10 – 11

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .

أما بعد أخي القارئ أقدم إليك كتابا جديدا عنوانه :

"العد و الاحتمالات "

يضاف إلى سلسلة (البكالوريا بين يديك).

يحتوي هذا الكتاب 100تمرين تطبيقي منها المحلولة حلا مفصلا ومنها المقترحة للحل.

إن التمارين الموجودة في هذا الكتيب ستساعد الطلبة على اجتياز كل الصعوبات التي يتلقونها في محور العد والاحتمالات وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق كما أرجو من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني بملاحظاتهم البناءة لتحسين محتوى هذا الكتيب .

كما أشكر شكرا جزيلا كل من ساهم من بعيد أو قريب في انجاز هذا العمل المتواضع .

محمد صابور

الإهـــداء

أهدي هذا العمل المتواضع إلى :

- والدي الكريمين.
- رجال التعليم المخلصين في عملهم .
- أبنائي الطلبة متمنيا لهم التوفيق في البكالوريا .

محمد صابور

الجزء الأول

العـــد



العـــــــد

القوائم

<u>تعريف:</u> E مجموعة منتهية ذات n عنصرا و p عدد طبيعي غير معدوم . نسمي قائمة ذات p عنصرا من E كل متتالية مرتبة $(a_1, a_2, ..., a_p)$ من p عنصرا من E .

عدد القوائم ذات p عنصرا من المجموعة E التي تشمل n عنصرا هو n^p.

الترتيبات

<u>تعريف:</u> E مجموعة ذات n عنصرا و p عدد طبيعي غير معدوم حيث $1 \leq p \leq n$. نسمي ترتيبة p عنصرا من E كل قائمة ذات p عنصرا بحيث تكون هذه العناصر متمايزة مثنى مثنى .

عدد الترتيبات لـ p عنصرا من المجموعة E التي تشمل n عنصرا هو العدد الطبيعي الذي يرمز له بـ A_n^p والمعرف كما يلي :

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)....(n-p+1)$$

التبديلات

<u>تعريف:</u> نسمي تبديلة لمجموعة E ذات n عنصرا كل ترتيبة n عنصرا من E .

عدد التبديلات لمجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي الذي يساوي : $n(n-1)(n-2)\times...\times 2\times 1 = n!$.

العدد $n!$ يقرأ n عاملي . نصطلح أن : $0! = 1$ و $1! = 1$.

التوفيقات

تعريف: E مجموعة ذات n عنصرا و p عدد طبيعي حيث : $0 \le p \le n$. نسمي توفيقة ذات p عنصرا من عناصر E كل جزء من E يشمل p عنصرا .

عدد التوفيقات لـ p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي الذي نرمز له بـ C_n^p أو $\binom{n}{p}$ وهو معرف كما يلي :

$C_n^p = 0$ إذا كان $n < p$ و $C_n^0 = 1$ و $C_n^n = 1$

$C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ إذا كان $1 \le p \le n$.

خواص

من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $0 \le p \le n$ فإن :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

وإذا كان $(1 \le p \le n-1)$ فإن : $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

دستور ثنائي الحد

x و y عددين طبيعيين ، n عدد طبيعي حيث $n \ge 1$ فإن :

$$(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p =$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + ... + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n$$

تماريـن محلولـة

تمرين 1

n و p عددين طبيعيين حيث $0 \le p \le n$. باستعمال نشر $(1+1)^n$ و $(1-1)^n$ احسب المجاميع الآتية :

$S = C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^p$ ، $S_1 = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ...$

$$S_2 = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ...$$

تمرين 2

n و p عددين طبيعيين حيث $1 \le p \le n$.

1- أثبت أن : $p \times C_n^p = n \times C_{n-1}^{p-1}$.

2- احسب المجموع : $S = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + pC_n^p + ... + nC_n^n$

تمرين 3

انطلاقا من نشر $(1+x)^n$ وبالاشتقاق احسب ما يلي :

1- $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + ... + pC_n^p + ... + nC_n^n$

2- $S_2 = C_n^1 - 2C_n^2 + ... + (-1)^{p-1} pC_n^p + ... + (-1)^{n-1} nC_n^n$

تمرين 4

1- باستعمال دستور ثنائي الحد $(1+x)^n$ ، احسب :

$$S_1 = C_n^0 + 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + ... + 3^p C_n^p + ... + 3^n C_n^n$$

$$S_2 = C_n^0 - 3C_n^1 + 3^2 C_n^2 + ... + (-1)^p 3^p C_n^p + ... + (-1)^n 3^n C_n^n$$

2- أ- اكتب $(1+x)^n$ في حالة $x = 8$

ب- استنتج أن العدد $9^n - 8n - 1$ يقبل القسمة على 64 .

تمرين 5

1- برهن أن $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ حيث n و p عددين طبيعيين .

2- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x :

$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p = 0$.

تمرين 6

ليكن المنشور التالي $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$. 1- أوجد الحد السادس في هذا المنشور . 2- عين معامل x^7 . 3- هل يوجد حد يشمل x^5 ؟

4- هل يوجد حد خالي من x ؟ .

تمرين 7

1- ماهو عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة التي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 (نشير إلى أن الأعداد التي رقمها الأول على اليسار 0 مثلا 0123 ليست أعدادا ذات أربعة أرقام) . 2- ما هو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال 1 والتي هي زوجية . 3- ما هو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال 1 والتي رقم عشرتها هو عدد فردي .

تمرين 8

1- ما هو عدد الأعداد ذات 5 أرقام التي يمكن تشكيلها باستعمال الرقم1 مرتين والرقم2 مرتين والرقم 3 مرة واحدة ؟ .

2- ما هو عدد الكلمات ذات أربعة حروف والتي يكن تكوينها باستعمال كلمة " محمد" . 3- ما هو عدد الكلمات ذات 25 حرفا (لها معنى أوليس معنى) والتي يكن تكوينها باستعمال أطول كلمة في اللغة الفرنسية : **Anticonstitutionnellement** .

تمرين 9

نعتبر كل التبديلات ذات 5 أرقام و المكونة من الأرقام التالية :

1، 2، 3 ، 4 ، 5 . 1- ما هو عدد هذه التبديلات ؟ .

2- احسب المجموع S لكل الأعداد الناتجة من هذه التبديلات .

3- باستعمال الأرقام السابقة احسب عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة . 4- ما هو عدد الأعداد المشار إليها في السؤال 3 والتي هي : أ- من مضاعفات 2 . ب- أكبر من 300 .

جـ - رقم عشرتها عدد فردي . د- تحتوي الرقم3 .

تمرين 10

يحتوي كيس على 3 كرات خضراء و7 كرات صفراء .

نسحب عشوانيا 4 كرات من الكيس .

I. نفرض أن سحب الكرات الأربعة يتم في آن واحد .

1) ما هو عدد طرق السحب؟ . 2) ما هوعدد طرق السحب كي نحصل على 4 كرات من نفس اللون ؟ . 3) ما هو عدد طرق السحب حتى يكون عدد الكرات الصفراء المسحوبة أكبر من عدد الكرات الخضراء المسحوبة ؟

II. نفرض أن في هذه المرة سحب الكرات الأربعة يتم على التوالي وبدون إرجاع . 1)ما هو عدد طرق السحب ؟

2) ما هو عدد طرق السحب حتى نحصل على :

أ- 3 كرات صفراء وكرة خضراء بهذا الترتيب .

ب- 3 كرات صفراء وكرة خضراء . جـ - على الأقل 3 كرات خضراء

تمرين 11

يحتوي كيس على 10 كرات : 3 حمراء و مرقمة 1، 1 ، 2

و 4 خضراء ومرقمة 3 ، 2 ، 2 ، 1 و 3 زرقاء ومرقمة 1، 2 ، 3 .

نسحب على التوالي 3 كرات من الكيس وبإرجاع الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي . 1- احسب عدد الحالات الممكنة لسحب هذه الكرات الثلاثة . 2- ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على :

أ- 3 كرات من نفس اللون .   ب- كرة بالضبط حمراء .
جـ- مجموع الأرقام التي تحملها الكرات المسحوبة هو5 .
د- 3 كرات تحمل نفس الرقم .

تمرين 12

نرمز بـ"F " لظهور الوجه لقطعة نقدية وبـ "P " لظهور الظهر .

I. نرمي هذه القطعة النقدية 3 مرات متتالية ونسجل بالترتيب الوجه الظاهر(F أو P) في كل رمية وبالتالي نحصل على النتائج على شكل ثلاثيات : $(F,F,P),(P,F,P),(F,F,F),...,$.
1- عين عدد النتائج الممكنة .
2- ما هو عدد النتائج التي يتكرر فيها الحرفP مرتين .

II. نعيد التجربة السابقة ، ولكن في هذه المرة نرمي القطعة النقدية 5 مرات متتالية . 1- ما هو عدد النتائج الممكنة التي نحصل عليها ؟ (النتيجة هي كل متتالية مرتبة من 5 حروف(F و P) .)
2- احسب عدد النتائج التي يتكرر فيها :   أ- الحرف P ثلاثة مرات على الأقل .   ب- الحرف P ثلاثة مرات على الأكثر .

تمرين 13

لدينا صندوقين A و B حيث الصندوق A يحتوي 3 كرات حمراء و4 كرات بيضاء والصندوق B يحتوي كرتين حمراوين وكرتين بيضاوين . نسحب في أن واحد كرتين من الصندوق A وكرة من الصندوق B وبالتالي نحصل على 3 كرات .
1- ما هو عدد طرق السحب بالكيفية المذكورة ؟
2- ما هو عدد طرق السحب للحصول على :
أ- كرة صفراء وكرتين بيضاوين . ب- ثلاثة ألوان مختلفة مثنى مثنى .
ج- كرة على الأكثر صفراء .

تمرين 14

جمعية تتكون من 12 رجل و8 نساء ، تريد تكوين مكتب يحتوي 5 أعضاء دائمين (رجلان على الأقل و امرأتان على الأقل) .
1- ما هو عدد الطرق لتكوين هذا المكتب ؟
2- نفرض أن رجلان و 3 نساء يرفضون المشاركة في تكوين هذا المكتب . ما هو عدد المكاتب في هذه الحالة ؟
3- ما هو عدد المكاتب الذي يحتوي السيد x ؟

تمرين 15

قسم يتكون من 20 تلميذا (12 ذكر و 8 إناث) . نريد تكوين لجنة تحتوي 5 تلاميذ . 1- ما هو عدد الطرق لتكوين هذه اللجنة ؟
3- ما هو عدد اللجان التي تحقق الشروط الآتية :
أ- عناصر اللجنة من نفس الجنس .
ب- عناصر اللجنة من جنسين مختلفين .   جـ- اللجنة تحتوي 3 ذكور و 2 إناث .   د- اللجنة تحتوي تلميذة على الأكثر .
3- نفرض أنه يوجد في هذا القسم التلميذ x وأخته y .
أ- ما هو عدد اللجان التي لا تحتوي x و y معا ؟
ب- ما هو عدد اللجان التي تحتوي x ولا توجد فيها y ؟

تمرين 16

جمعية تتكون من15 رجلا و12 امرأة ، تريد تشكيل لجنة تضم : رئيسا ونائب له وأمين . 1- ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها ؟.
2- ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها بحيث يكون :
أ- الأمين امرأة .   ب- الرئيس رجلا والأمين امرأة .
جـ- الرئيس ونائبه من جنسين مختلفين .
د- السيد z لا يترأس اللجنة
3- ما هو عدد الجان المختلطة(مكونة من رجال ونساء)؟

تمرين 17

صندوق يحتوي 4 قريصات حمراء (ثلاثة شكلها مثلث وواحدة شكلها مربع) و3 قريصات بيضاء (اثنان شكلها مثلث وواحدة شكلها مربع) نسحب على التوالي 4 قريصات من الصندوق وبدون إعادة القريصة إلى الصندوق . 1- ما هو عدد الحالات الممكنة للحصول على :

ا- قريصة بيضاء واحدة شكلها مثلث وفي السحبة الأولى .

ب- القريصة الأولى حمراء شكلها مربع والقريصات الثلاثة حمراء وشكلها مثلث . جـ- القريصات الثلاثة الأولى حمراء و شكلها مثلث والقريصة الرابعة بيضاء شكلها مربع .

2- نسحب في هذه المرة ثلاثة قريصات في آن واحد .

ما هو عدد الطرق للحصول على :

أ- 3 قريصات من نفس الشكل . ب- 3 قريصات من نفس اللون .

ج- قريصة شكلها مربع واثنتين حمراوين وشكلهما مثلث .

د- على الأكثر قريصتين شكل كل واحدة منهما مربع .

تمرين 18

لعبة 7 عائلات تتكون من العائلات الآتية :

عائلة إبراهيم ، عائلة إسماعيل ، عائلة نوح ، عائلة يوسف ، عائلة يونس ، عائلة عيسى ، عائلة محمد . كل عائلة مكونة من الأفراد التالية : الجد ، الجدة ، الأب ، الأم ، الابن ، البنت .

اللعبة تتمثل في سحب 3 أوراق على التوالي وبدون إعادة الورقة المسحوبة إلى اللعبة . ما هو عدد طرق السحب في الحالات الآتية :

أ- نحصل على : جد ، جدة ، أب بهذا الترتيب .

ب- الأفراد الثلاثة من عائلة محمد . ج- نحصل على بنتين وابن .

د- لا توجد أم من بين الأوراق الثلاثة المسحوبة .

2- نسحب في هذه المرة 3 أوراق في آن واحد .

ما هو عدد طرق السحب للحصول على :

أ- 3 جدات .

ب- أم وابنتين .

جـ- فردين من عائلة محمد وفرد من عائلة إسماعيل .

د- على الأقل أبوين .

تمرين 19

نريد اختيار وفد من 5 أساتذة من بين 20 أستاذا(14 رجل و6 نساء) للحضور إلى الاجتماع السنوي الذي يقام بمديرية التربية .

بكم طريقة يمكن اختيار الوفد في الحالات الآتية :

1- عناصر الوفد من نفس الجنس .

2- الوفد مكون من 3 رجال وامرأتين .

3- عدم وجود أستاذين متخاصمين معا في الوفد .

4- هناك أستاذ وزوجته ولا يستطيع أحدهما حضور الاجتماع منفردا .

5- الأستاذ x يريد أن يكون في وفد لا توجد فيه النساء ولا يوجد فيه السيد z .

تمرين 20

عدد المشاركين في السباق النهائي للعدو الريفي هو 15 منهم :

3 جزائريين ، 5 فرنسيين ، 4 أمريكيين ، 3 فلسطينيين .

1- ما هو عدد نتائج السباق (نقصد بالنتيجة ترتيب 15 مشاركا بحيث لا توجد فيها رتب متساوية) .

2- ما هو عدد نتائج السباق في الحالات ألآتية :

أ- الرتب الثلاثة الأولى للجزائريين .

ب- الرتبة الأولى للجزائري والرتب 2 ، 3 ، 4 للفرنسيين .

ج- الرتبة الأولى والثانية للفلسطينيين والثالثة والرابعة للجزائريين مع امتناع الفرنسيين عن المشاركة .

د- الرتب الثلاثة الأولى للفلسطينيين والجزائريين والرتب الخمسة الأخيرة للفرنسيين .

حلـول التمـاريـــن

حل التمريـن 1

$$(x+y)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \dots + C_n^p x^{n-p} y^p + \dots + C_n^n y^n$$

بوضع $x = 1$ و $y = 1$ في المساواة السابقة نجد :

$$S = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$(1-1)^n = \left[1+(-1)\right]^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

ومنه : $\left(C_n^0 + C_n^2 + \dots\right) - \left(C_n^1 + C_n^3 + \dots\right) = 0$

ومنه : $\left(C_n^0 + C_n^2 + \dots\right) = \left(C_n^1 + C_n^3 + \dots\right)$

ولدينا : $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n$

ومنه : $\left(C_n^0 + C_n^2 + \dots\right) + \left(C_n^1 + C_n^3 + \dots\right) = 2^n$

ومنه : $\left(C_n^0 + C_n^2 + \dots\right) = \left(C_n^1 + C_n^3 + \dots\right) = 2^n \div 2 = 2^{n-1}$

إذن : $S_1 = S_2 = 2^{n-1}$

حل التمريـن 2

$$p \times C_n^p = p \times \frac{n!}{p!(n-p)!} = p \times \frac{n \times (n-1)!}{p \times (p-1)!(n-p)!} =$$

$$= n \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = n \times C_{n-1}^{p-1}$$

2- لدينا : $p \times C_n^p = n \times C_{n-1}^{p-1}$ وباعطاء إلى p القيم : 1، 2، ...، n

ثم نجمع كل هذه المساويات طرف مع طرف نجد :

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n = nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + \dots + nC_{n-1}^{n-1} =$$

$$= n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1}\right) = n \times 2^{n-1}$$

لأن : $C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1} = 2^{n-1}$ (تمرين سابق)

حل التمريـن 3

1- نعلم أن : $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^p x^p + \dots + C_n^n x^n$

ومنه باشتقاق طرفي المساواة نجد :

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + \dots + pC_n^p x^{p-1} + \dots + nC_n^n x^{n-1}$$

باعطاء إلى x القيم $(+1)$ و (-1) وبتعويض في المساواة السابقة

نجد : $S_1 = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + pC_n^p + \dots + nC_n^n = n \times 2^{n-1}$

$$S_2 = C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{p-1} pC_n^p + \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$$

حل التمريـن 4

1- $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^p x^p + \dots + C_n^n x^n \quad (*)$

بتعويض $x = 3$ و $x = -3$ في المساواة $(*)$ نجد :

$$S_1 = C_n^0 + 3C_n^1 + \dots + 3^p C_n^p + \dots + 3^n C_n^n = 4^n$$

$$S_2 = C_n^0 - 3C_n^1 + \dots + (-1)^p 3^p C_n^p + \dots + (-1)^n 3^n C_n^n = (-2)^n$$

$$(1+8)^n = 9^n = C_n^0 + 8C_n^1 + 8^2 C_n^2 + \dots + 8^p C_n^p + \dots + 8^n C_n^n$$

2) ومنه : $9^n = 1 + 8n + 8^2 C_n^2 + \dots + 8^p C_n^p + \dots + 8^n C_n^n$

$$9^n - 8n - 1 = 8^2 C_n^2 + \dots + 8^p C_n^p + \dots + 8^n C_n^n =$$

$$= 8^2\left(C_n^2 + \ldots + 8^{p-2} C_n^p + \ldots + 8^{n-2} C_n^n\right)$$

إذن العدد $9^n - 8n - 1$ هو من مضاعفات 64 فهو يقبل القسمة على 64 .

حل التمرين 5

(1

$$C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(n-p)}{p!(n-p)!} + \frac{(n-1)!p}{p!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$$

(2

$$x^2 - C_n^p x + C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p = 0$$

$$\Delta = \left(C_n^p\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p = \left(C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p =$$

$$= \left(C_{n-1}^p\right)^2 + 2C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p + \left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2 - 4C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p =$$

$$= \left(C_{n-1}^p\right)^2 - 2C_{n-1}^{p-1} \cdot C_{n-1}^p + \left(C_{n-1}^{p-1}\right)^2 = \left(C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}\right)^2$$

$$x_1 = \frac{C_n^p + C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}}{2} = \frac{C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}}{2} = C_{n-1}^p$$

$$x_2 = \frac{C_n^p - \left(C_{n-1}^p - C_{n-1}^{p-1}\right)}{2} = \frac{C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} - C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}}{2} = C_{n-1}^{p-1}$$

حل التمرين 6

1- إذا رمزنا للحد العام لهذا المنشور بـ : $u_p = C_{10}^p x^{10-p}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^p$ حيث $p \in \mathbb{N}$ و $p \le 10$ فيكون الحد السادس في المنشور $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ هو $u_5 = C_{10}^5 x^5\left(-\frac{1}{x^2}\right)^5$

. $u_5 = C_{10}^5 x^5\left(-\frac{1}{x^{10}}\right) = -252 \times \frac{1}{x^5}$

2) لدينا : $u_p = C_{10}^p x^{10-p}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^p =$

$$= C_{10}^p (x)^{10-p} \cdot (-1)^p \left(x^{-2}\right)^p = (-1)^p C_{10}^p (x)^{10-3p}$$

$10 - 3p = 7$ ومنه $p = 1$ ومنه معامل x^7 هو $(-1)C_{10}^1 = -10$

3- يكون الحد الذي يشمل x^5 موجود إذا وجد عدد طبيعي p يحقق : $10 - 3p = 5$ ومنه $p = \frac{5}{3} \notin \mathbb{N}$ إذن لا يوجد حد يشمل x^5 في هذا المنشور . 4 - يكون الحد خالي من x موجود إذا كان $10 - 3p = 0$ ومنه $p = \frac{10}{3} \notin \mathbb{N}$ ، إذن الحد الخالي من x غير موجود .

حل التمرين 7

1) توجد 6 طرق لاختيار رقم آلاف لأن الرقم 0 لا يكون في رقم الآلاف، تبقى 6 اختيارات لرقم المئات لأن 0 ممكن أن يكون في رقم المئات وتبقى 5اختيارات لرقم العشرات و4 اختيارات لرقم الآحاد ، إذن

عدد الأعداد المكون من أربعة أرقام مختلفة هو :
(عدد) $6\times6\times5\times4=720$.

2) الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة والتي هي زوجية هي الأعداد التي رقم آحادها هو عدد زوجي : 0 ، 2 ، 4 ، 6 .
الأعداد الزوجية التي تنتهي بالرقم 0 (رقم الآحاد) يختار رقم آلافها من بين 6 أرقام 1، 2، 3، 4، 5، 6 ويختار رقم مئاتها من بين 5 أرقام ورقم عشرتها من بين 4 أرقام وعددها هو : $6\times5\times4=120$
الأعداد التي تنتهي بـ 2، 4، 6 يختار رقم آلافها من بين 5 أرقام لأن الرقم 0 لا يكون في الآلف ويكون عددها : $(5\times5\times4)\times3=300$
إذن عدد الأعداد الزوجية المكونة من أربعة أرقام مختلفة هو :
(عدد) $300+120=420$.

3) توجد 3 أعداد فردية ومنه لدينا 3 اختيارات لرقم العشرات و5 اختيارات لرقم الآلف (الصفر غير موجود في الاختيار)
و5 اختيارات لرقم المئات و4 لرقم الآحاد ، ومنه عدد الأعداد التي رقم عشرتها عدد فردي هو : $3\times5\times5\times4=300$

حل التمرين 8

1) عدد الأعداد ذات 5 أرقام التي يمكن تكوينها باستعمال الرقم1 مرتين والرقم2 مرتين والرقم 3 مرة واحدة هو: (عدد) $\frac{5!}{2!2!1!}=30$

2) كلمة **محمد** تحتوي مرتين الحرف " م " ومرة الحرف "ح" ومرة الحرف " د " ، إذن عدد الكلمات المطلوبة هو : $\frac{4!}{2!1!1!}=12$

3) الكلمة " Anticonstitutionnellement "تحتوي :
1A ,1C,3E, 3I, 2L, 1M, 5N , 2O, 1S, 5T, 1U.
ويكون عدد الكلمات ذات 25 حرفا هو :

$$\frac{25!}{3!\times3!\times2!\times5!\times2!\times5!}=1144066\times15!$$

حل التمرين 9

1) عدد التبديلات ذات 5 أرقام هو : (عدد) $120=5!$.

2) لكل عدد n من هذه التبديلات نستطيع أن نرفق له عدد واحد فقط n' بحيث مجموع كل رقمين متماثلين (الآلف مع الآلف ، المئات مع المئات ،....) في العددين يساوي 6 . مثلا : 54321 نرفق له العدد 12345 ويكون لدينا في جميع الحالات $n+n'=66666$ ومنه مجموع 120 عدد هو يساوي مجموع 60 عدد 66666 أي :
$60\times66666=399960$.

3) عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام مختلفة هو : $A_5^3=60$

4- أ) الأعداد التي هي من مضاعفات 2 تنتهي بـ 2 أو 4 ويكون عدد ها $(4\times3)\times2=24$.

ب- عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة والتي هي أكبر من 300 يختار رقم مئاتها من الأرقام 3، 4 ، 5 ويكون عددها :
(عدد) $3\times4\times3=36$. جـ - عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة والتي رقم عشرتها عدد فردي هو $(4\times3)\times3=36$

د- عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة والتي تحتوي الرقم3 هو $3\times A_4^2=3\times(4\times3)=36$ (لأن الرقم3 قد يكون في رقم المئات أو العشرات أو الآحاد) .

حل التمرين 10

I. 1) بما أن سحب الكرات الأربعة يتم في آن واحد فإن عدد طرق السحب هو : $C_{10}^4=210$.

2) لسحب 4 كرات من نفس اللون يجب سحب 4 كرات صفراء

ويكون عندئذ عدد طرق السحب هو : $C_7^4 = 35$

3) يكون عدد الكرات الصفراء المسحوبة أكبر من عدد الكرات الخضراء المسحوبة عندما نسحب 3 كرات صفراء وكرة خضراء أو نسحب 4 كرات صفراء ويكون عدد طرق السحب في هذه الحالة هو : $C_7^3 \times C_3^1 + C_7^4 = 105 + 35 = 140$.

II. 1) عدد طرق السحب لـ 4 كرات على التوالي وبدون إرجاع هو : $A_{10}^4 = 5040$. 2 – أ) عدد طرق السحب على التوالي للحصول على 3 كرات صفراء وكرة خضراء بهذا الترتيب : $A_7^3 \times A_3^1 = 630$.

ب) إذا رمزنا للكرة الصفراء بـ S وللكرة الخضراء بـ V، فيكون سحب 3 كرات كرات صفراء وكرة خضراء كما يلي :

$(S,S,S,V),(S,S,V,S),(S,V,S,S),(V,S,S,S)$ ،

إذن عدد طرق السحب المذكور هو : $(7\times6\times5\times3)\times4 = 2520$.

جـ) سحب على التوالي 4 كرات على الأقل 3 كرات منهم خضراء ، يتحقق هذا لما نحصل على :

$(V,V,S,V),(S,V,V,V),(V,S,V,V),(V,V,V,S)$

ويكون عدد طرق السحب المذكور هو : $A_3^3 \times A_7^1 \times 4 = 168$

حل التمرين 11

1) بما أن الكرة المسحوبة تعاد إلى الكيس قبل السحب الموالي ، فيكون عدد الحالات الممكنة لسحب 3 كرات هو : $10^3 = 1000$

2- أ) الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون يعني تكون هذه الكرات إما حمراء وعدد سحبها : $3^3 = 27$ أو زرقاء وعدد سحبها : $3^3 = 27$ أو خضراء وعدد سحبها : $4^3 = 64$ ، إذن عدد الطرق لسحب 3 كرات من نفس اللون : $27 + 27 + 64 = 118$.

ب) سحب كرة بالضبط حمراء يعني سحب كرة حمراء من بين 3 كرات حمراء وكرة ليست حمراء من بين 7 كرات ثم كرة أخرى ليست حمراء من بين 7 كرات ويكون عدد السحب : $3\times7\times7 = 147$ وبما أن الكرة الحمراء قد تكون في السحبة الأولى أو في الثانية أو في الثالثة ، إذن توجد 3 رتب محتملة للكرة الحمراء ومنه عدد الطرق السحب للحصول على كرة بالضبط حمراء هو: $147\times3 = 441$.

جـ) مجموع الأرقام التي تحملها الكرات الثلاثة هو5 يعني سحب 3 كرات تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 3 أو 3 كرات تحمل الأرقام 1، 2، 2 .

بالنسبة للأرقام 1 ،1 ،3 لدينا ثلاثة ترتيبات ممكنة :

$(3,1,1), (1,3,1), (1,1,3)$ وكل ترتيبة نستطيع تكوينها بـ : $4\times4\times2 = 32$ (طريقة) وبالنسبة للترتيبات الثلاثة فيكون عدد الطرق : $32\times3 = 96$ (طريقة) .

بالنسبة للأرقام 1 ،2 ،2 لدينا أيضا 3 ترتيبات ممكنة وهي : $(1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)$ ويكون عدد طرق السحب للحصول عليها : $4\times4\times4\times3 = 192$ (طريقة) .

إذن عدد طرق السحب للحصول على 3 كرات مجموع أرقامها هو 5 : $96 + 192 = 288$ (طريقة) .

د) الكرات الثلاثة تحمل نفس الرقم يعني سحب 3 كرات مرقمة : $(2,2,2), (1,1,1), (3,3,3)$ ويكون عدد طرق السحب : $4^3 + 4^3 + 2^3 = 136$ (طريقة) .

حل التمرين 12

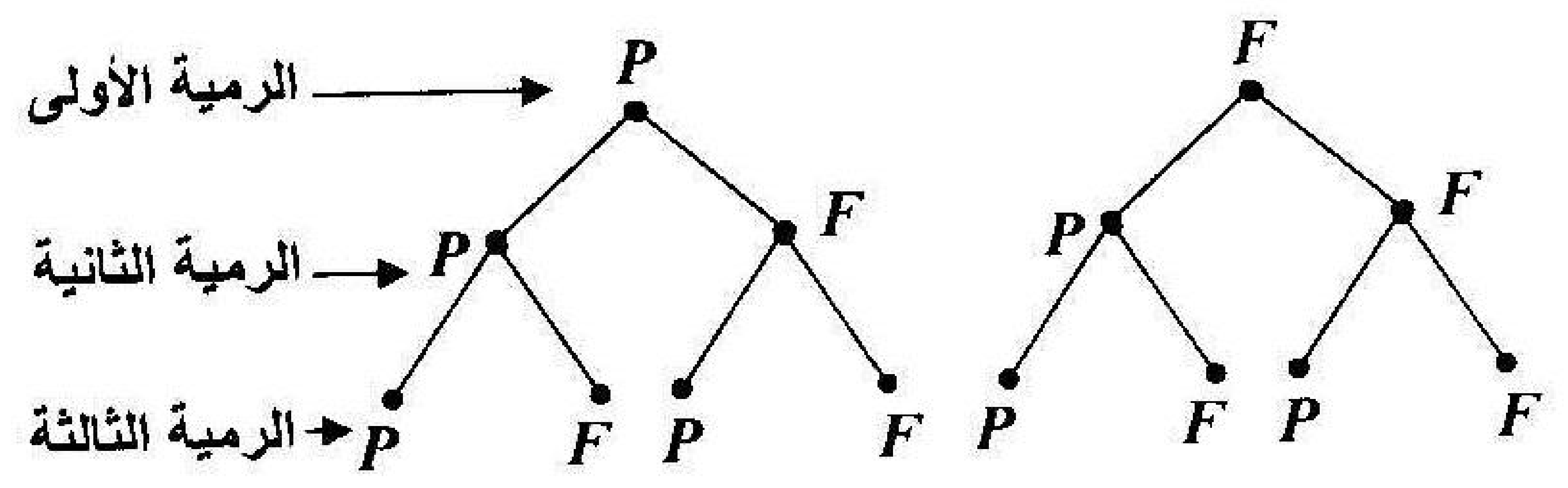
I. 1) عدد النتائج الممكنة لما نرمي 3 مرات متتالية قطعة نقدية هو : $2^3 = 8$ ويمكن التحقق من هذا باستعمال شجرة الاحتمالات.

النتائج : $(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(P,F,F),$

$(F,P,P),(F,P,F),(F,F,P),(F,F,F)$

2) النتائج التي يتكرر فيها الحرف P مرتين هي :

(F,P,P) ، (P,F,P) ، (P,P,F) وعددها 3 .



II. 1) عدد النتائج الممكنة لما نرمي 5 مرات متتابعة قطعة نقدية هو : $2^5 = 32$. بصفة عامة إذا رمينا n مرة متتابعة قطعة نقدية وسجلنا بالترتيب الوجه الذي يظهر في كل رمية فيكون عدد النتائج الممكنة هو 2^n .

2) من أجل كل $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ فيكون عدد النتائج التي يتكرر فيها k مرة الحرف P هو C_5^k. سنجد في الجدول الآتي كل قيم C_5^k

تكرار الحرف P	0	1	2	3	4	5
عدد النتائج C_5^k	1	5	10	10	5	1

أ) عدد النتائج التي تحصل فيها على تكرار الحرف P ثلاثة مرات على الأقل هو : $10+5+1=16$

ب) عدد النتائج التي تحصل فيها على تكرار الحرف P ثلاثة مرات على الأكثر هو : $1+5+10+10=26$

حل التمريـن 13

1) عدد طرق السحب : $C_8^2 \times C_4^1 = 28\times 4 = 112$

2) – أ للحصول على كرة صفراء وكرتين بيضاوين نسحب من الصندوق A كرة صفراء وكرة بيضاء ومن الصندوق B نسحب كرة بيضاء ويكون عدد طرق السحب للكرات الثلاثة بالكيفية المذكورة هو :

$C_1^1\times C_4^1\times C_2^1 = 8$ (طرق) .

ب- للحصول على ثلاثة ألوان مختلفة مثنى مثنى نسحب من الصندوق A كرة صفراء وكرة حمراء ومن الصندوق B كرة بيضاء أو نسحب من الصندوق A كرة صفراء وكرة بيضاء ومن الصندوقB كرة حمراء ويكون عدد طرق السحب :

$(C_1^1\times C_3^1\times C_2^1)+(C_1^1\times C_4^1\times C_2^1)=14$ (طريقة) .

جـ سحب كرة صفراء على الأكثر يعني سحب كرة واحدة صفراء أو لانسحب أية كرة صفراء ويكون عدد طرق السحب في هذه الحالة :

$(C_7^1\times C_1^1\times C_4^1)+(C_7^2\times C_4^1)=112$ (طريقة)

حل التمريـن 14

1) رجلان على الأقل وامرأتان على الأقل يعني أن المكتب يكون فيه 3 رجال وامرأتان أو رجلان و3 نساء ويكون عدد طرق تكوين هذا المكتب : $(C_{12}^3\times C_8^2)+(C_{12}^2\times C_8^3)=6160+3696=9856$

2) في حالة رفض رجلان و3 نساء المشاركة فيكون عدد المكاتب :

$(C_{10}^3\times C_5^2)+(C_{10}^2\times C_5^3)=1200+450=1650$

3) عدد المكاتب التي تحتوي السيد x هو :

$(C_1^1\times C_{11}^2\times C_8^2)+(C_1^1\times C_{11}^1\times C_8^3)=1540+616=2156$

حل التمريـن 15

1) عدد الطرق لتكوين هذه اللجنة هو : $C_{20}^{5} = 15504$

2 – أ) عدد اللجان التي أعضاؤها هي من نفس الجنس هو :

(لجنة) $C_{12}^{5} + C_{8}^{5} = 848$.

ب- عدد اللجان التي أعضاؤها من الجنسين معا(المختلطة) يساوي عدد اللجان الكلي – عدد اللجان التي أعضاؤها من نفس الجنس أي :

(لجنة) $15504 - 848 = 14656$.

ج- عدد الجان المكونة من 3 أعضاء ذكور و2 إناث هو :

(لجنة) $C_{12}^{3} \times C_{8}^{2} = 6160$.

د- عدد اللجان التي تحتوي تلميذة على الأكثر هو :

(لجنة) $C_{12}^{5} + \left(C_{12}^{4} \times C_{8}^{1}\right) = 792 + 495 = 1287$

3- أ) عدد اللجان التي لا تحتوي x و y معا يساوي عدد اللجان الكلي – عدد اللجان التي تحتوي x و y معا . اللجان التي تحتوي x و y معا هي اللجان التي يتم تشكيلها بإضافة 3 أعضاء (يختارون من بين 18 تلميذا) إلى التلميذين x و y وعددها (لجنة) $C_{18}^{3} = 816$

إذن عدد اللجان التي لا تحتوي x و y هو $15504 - 816 = 14688$

ب) اللجان التي تحتوي x ولا توجد فيها التلميذة y يتم تشكيلها باختيار 4 تلاميذ من بين 18 (بدن x و y) التي تضاف إلى التلميذ x وعددها $C_{18}^{4} = 3060$.

حل التمريـن 16

1) عدد طرق لتكوين هذه اللجنة هو : $A_{27}^{3} = 17550$

2- أ) عدد اللجان التي يكون أمينها امرأة هو : $A_{12}^{1} \times A_{26}^{2} = 7800$

ب - عدد اللجان التي يكون رئيسها رجلا و أمينها امرأة هو :

$A_{15}^{1} \times A_{12}^{1} \times A_{25}^{1} = 4500$.

جـ) عدد اللجان التي يكون رئيسها ونائبه من جنسين مختلفين هو :

$\left(A_{15}^{1} \times A_{12}^{1} \times A_{25}^{1}\right) \times 2 = 9000$.

د) عدد اللجان في هذه الحالة = عدد اللجان الكلي – عدد اللجان التي يترأسها السيد z . عدد اللجان التي يترأسها z هو: $A_{26}^{2} = 650$

إذن عدد اللجان التي لا يترأسها z هو : $17550 - 650 = 16900$

3) عدد اللجان المختلطة يساوي عدد اللجان الكلي – عدد اللجان من نفس الجنس. عدد اللجان من نفس الجنس هو :

$A_{15}^{3} + A_{12}^{3} = 1320 + 2730 = 4050$.

إذن عدد اللجان المختلطة : $17550 - 4050 = 13500$

حل التمريـن 17

1- أ) عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة : $A_{2}^{1} \times A_{5}^{3} = 20$

ب) عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة : $1 \times A_{3}^{3} = 6$

جـ) عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة : $A_{3}^{3} \times 1 = 6$

2- أ) عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة : $C_{5}^{3} = 10$

ب) عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة : $C_{4}^{3} + C_{3}^{3} = 5$

جـ) عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة : $C_{2}^{1} \times C_{3}^{2} = 6$

د) عدد الحالات الممكنة في هذه الحالة :

$$C_{5}^{3} + \left(C_{2}^{1} \times C_{5}^{2}\right) + \left(C_{2}^{2} \times C_{5}^{1}\right) = 35$$

حل التمريـن 18

1- أ) عدد طرق السحب في هذه الحالة : $A_{7}^{1} \times A_{7}^{1} \times A_{7}^{1} = 343$

ب) عدد طرق السحب في هذه الحالة : $A_{6}^{3} = 120$

ج) توجد 3 حالات ممكنة في ترتيب الابن والبنتين ويكون عدد طرق السحب في هذه الحالة :

$3\times\left(A_7^2\times A_7^1\right)=882$.

د) عدد طرق السحب في هذه الحالة : $A_{35}^3 = 39270$.

2- أ) عدد طرق السحب في هذه الحالة : $C_7^3 = 35$

ب) عدد طرق السحب في هذه الحالة : $C_7^1\times C_7^2 = 147$

ج) عدد طرق السحب في هذه الحالة : $C_6^2\times C_6^1 = 90$

د) عدد طرق السحب في هذه الحالة : $\left(C_7^2\times C_{35}^1\right)+C_7^3 = 770$

حل التمرين 19

1) عدد طرق لاختيار الوفد في هذه الحالة : $C_{14}^5 + C_6^5 = 2008$

2) عدد طرق لاختيار الوفد في هذه الحالة : $C_{14}^3\times C_6^2 = 5460$

3) إذا كان a و b هما الأستاذين المتخاصمين فيكون عدد الوفود التي لا تحتوي a و b معا يساوي عدد الطرق الكلي – عدد طرق تكوين الوفد الذي يحتوي a و b معا ويكون عدد طرق لتكوين الوفد في هذه الحالة : $C_{20}^5 - C_{18}^3 = 15504 - 816 = 14688$

4) لإكمال الوفد يجب إضافة 3 أعضاء للعضوين الأستاذ وزوجته ويكون اختيار الأعضاء الثلاثة من بين 18 إذن يكون عدد طرق لاختيار الوفد المذكور هو : $C_{18}^3 = 816$

5) عدد الطرق لاختيار الوفد في هذه الحالة هو $C_{12}^4 = 495$

حل التمرين 20

1) عدد نتائج السباق هو : $A_{15}^{15} = 15! = 15\times14\times\ldots\times1$

2- أ) عدد نتائج السباق في هذه الحالة : $A_3^3\times A_{12}^{12} = 3!\times12!$

ب) عدد نتائج السباق في هذه الحالة : $A_3^1\times A_5^3\times11! = 180\times11!$

ج) عدد نتائج السباق في هذه الحالة : $A_3^2\times A_3^2\times6! = 36\times6!$

د) إذا رمزنا للفلسطيني بـ P والجزائري بـ A فتكون الرتب الثلاثة الأولى للفلسطينيين والجزائريين كما يلي

$(A,A,P),(A,P,A),(P,A,A),(P,P,A)$

$,(P,A,P),(A,P,P)$

ويكون عدد نتائج السباق في هذه الحالة :

$6\times\left(A_3^2\times A_3^1\right)\times5!\times7! = 108\times5!\times7!$

تمـارين مـقترحة للحـل

تمريـن 1

ليكن P_n عدد التبديلات لـ n عنصرا مختلفة .

1) برهن أن : $P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1}$.

2) استنتج العلاقة : $P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + \dots + (n-1)P_{n-1}$

تمريـن 2

حل في $\mathbb{N}$ المعادلات الآتية :

أ) $C_n^3 - C_n^2 = \frac{1}{6}\left(n^3 - 6n^2\right) + 5$. ب) $A_n^2 + n^2 = 15$

جـ) $C_n^3 + C_n^2 = 3n(n-1)$. د) $\begin{cases} C_{x+1}^1 = 3y \\ C_{x+y}^2 = 2 \end{cases}$

تمريـن 3

n و p عددين طبيعيين حيث $n \ge p$. 1) أثبت أن : $p \times C_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$. 2) احسب المجموع :

$$S = 1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{p+1}C_n^p + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$$

تمريـن 4

n و p عددين طبيعيين حيث $n \ge p$. برهن أن :

1) $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$.

2) $C_n^p = C_{n-3}^p + 3C_{n-3}^{p-1} + 3C_{n-3}^{p-2} + C_{n-3}^{p-3}$

تمريـن 5

باستعمال دستور ثنائي الحد أنشر ما يلي :

$$(3x-2)^5,\ \left(1-2\sqrt{2}\right)^6,\ \left(\sqrt{3}-x\right)^4,\ \left(1+\sqrt{2}-2\right)^6$$

تمريـن 6

نعتبر ثنائي الحد $(x-2a)^{15}$. أ) عين الحد التاسع في هذا المنشور

ب) ما هو معامل x^7a^8 .

ج) ما هو معامل الحد $x^6y^5z^4$ في منشور $(2x-5y+z)^{15}$

تمريـن 7

ليكن المنشور $\left(3x - \frac{1}{x^2}\right)^{15}$. 1) أوجد الحد التاسع في هذا المنشور

2) أوجد معامل x^9 . 3) أوجد الحد الخالي من x .

4) هل يوجد حد يشمل x^7 .

تمريـن 8

كيس يحتوي 3 كرات حمراء ، كرتين خضراوين ، كرة بيضاء .
نسحب على التوالي كرتين من الكيس ونعيد في كل مرة الكرة المسحوبة قبل السحب الموالي . ما هو عدد طرق السحب في الحالات الآتية : أ) نسحب كرتين بيضاوين . ب) نسحب كرة حمراء وكرة خضراء . جـ) نسحب كرة حمراء وكرة خضراء بهذا الترتيب .
د) نسحب كرة خضراء على الأكثر .

تمريـن 9

صندوق يحتوي 3 كرات حمراء مرقمة 1 ، 1 ، 2 وكرتين سوداوين مرقمة 2 ، 2 و4 كرات زرقاء مرقمة 1 ، 1 ، 1 ، 2 .

نسحب على التوالي 3 كرات من الصندوق وبدون إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق . ما هو عدد طرق السحب للحصول على :
أ – 3 كرات من نفس اللون . ب- 3 كرات تحمل نفس الرقم
ج- كرتين حمراوين مرقمة1 ،1 وكرة زرقاء بهذا الترتيب .
د – كرة على الأكثر سوداء . هـ - 3 كرات زرقاء وتحمل الرقم 1 .

تمريـن 10

كيس يحتوي 7 قريصات حمراء ، 3 قريصات خضراء ، قريصتين صفرا وتين . نسحب في آن واحد 3 قريصات من الكيس .
ما هو عدد طرق السحب للحصول على :
أ- 3 قريصات من نفس اللون . ب- 3 قريصات تحمل ألوان مختلفة .
جـ- 3 قريصات حمراء . د- قريصتين على الأكثر حمراء .

تمريـن 11

جمعية مكونة من 15 رجلا و8 نساء تريد تكوين لجنة تضم 5 أعضاء من بينهم يوجد 3 رجال على الأقل . 1) ما هو عدد الطرق لتكوين هذه اللجنة . 2) ما هو عدد اللجان التي تحتوي :
أ- 5 رجال . ب- 4 رجال وامرأة والسيد x غير موجود في اللجنة .
ج- السيد x موجود في اللجنة ومعه السيدة y .

تمريـن 12

عدد ممثلين حي سكني هو 15 (9 رجال و 6 نساء) يريد تكوين مكتب يحتوي رئيسا ونائبا له وأمينا . 1) ما هو عدد المكاتب ؟
2) ما هو عدد الطرق لتكوين هذا المكتب في الحالات الآتية :
أ- الرئيس ونائبه من الرجال . ب- الرئيس رجل والنائب امرأة .
ج- السيد أحمد غير موجود في المكتب . د) الأعضاء الثلاثة من نفس الجنس . هـ) السيد أحمد رئيس ولأمين امرأة .

تمريـن 13

1) كم من كلمة ذات ثلاثة حروف نستطيع تكوينها باستعمال كلمة

" فطيمة " . 2) من بين هذه الكلمات كم توجد من كلمة :
أ- تبدأ بالحرف " ط" . ب) تنتهي بـ " ف "
ج) لا تحتوي الحرف "ي " . د) تبدأ بـ " م " وتنتهي بـ " ي" .

تمريـن 14

لعبة تحتوي 32 ورقة : 8 زرقاء ، 8 حمراء ، 8 بيضاء ، 8 صفراء.
كل لون مرقم من 1 إلى 8 . نسحب في آن واحد 5 أوراق من اللعبة .
ما هو عدد طرق السحب للحصول على :
أ- ورقة حمراء تحمل الرقم 1 .
ب- بالضبط ورقة رقمها 1 وورقتان تحملان الرقم 2 .
ج) 4 أوراق تحمل الرقم 3 . د) على الأكثر ورقة تحمل الرقم 5 .
هـ) ورقة زرقاء تحمل رقما أكبر من4 وورقتين تحملان الرقم 2 وورقتين تحملان الرقم 1 .

تمريـن 15

ثلاثة صناديق A, B, C يحتوي كل واحد منهم 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 . نسحب كرة من كل صندوق وبالتالي نحصل على عدد مكون من ثلاثة أرقام . إذا اعتبرنا أن رقم الكرة المسحوبة من الصندوق A هو رقم مئات العدد ورقم الكرة المسحوبة من الصندوق B هو رقم العشرات ورقم الكرة المسحوبة من الصندوق C هو رقم الوحدات .
1) ما هو عدد الأعداد المحصل عليها .
2) ما هو عدد الأعداد المكون من ثلاثة أرقام مختلفة .
3) ما هو عدد الأعداد ذات ثلاثة أرقام مختلفة والتي :
أ – رقم عشراتها أقل من5 . ب- رقم وحداتها من مضاعفات 2 .
ج- الأعداد المحصل عليها أقل من 400 .

تمريـن 16

كيس يحتوي 10 كرات : 2حمراء ، 3 خضراء ، 5 بيضاء .
نسحب من الكيس 3 كرات في آن واحد .

1) احسب عدد الحالات الممكنة للحصول على : أ- 3 كرات من نفس اللون . ب) كرة حمراء على الأقل . د) الألوان الثلاثة .

2) نسحب في هذه المرة 3 كرات على التوالي بحيث إذا كانت الكرة المسحوبة بيضاء نعيدها إلى الكيس قبل السحب الموالي .

احسب عدد الحالات الممكنة للحصول على كرة حمراء في السحبة الأولى وكرتين بيضاوين .

تمرين 17

كم من فريق لكرة القدم نستطيع تكوينه باستعمال 15 لاعب في الحالتين الآتيتين : أ- عدم توزيع الأدوار على اللاعبين .

ب- توزيع الأدوار على اللاعبين (مهاجم ، مدافع ، لاعب وسط ،...)

تمرين 18

صندوق يحتوي 5 حروف (ح ، م ، د ، ب ،ي) . نسحب على التوالي 4 حروف وبدون إعادة الحرف المسحوب إلى الصندوق .

1) ما هو عدد الكلمات ذات أربعة حروف التي يمكن تكوينها ؟

2) كم كلمة ذات أربعة حروف مختلفة (لها أو ليس لها معنى) والتي

أ- تحتوي الحرفين د وب في البداية . ب) لا تحتوي الحرف ي .

ج) تبدأ بـ " م " وتنتهي بـ " حـ " . د) تحتوي م ، د ، ح متتابعة .

تمرين 19

رقم الهاتف لمنطقة معينة في الجزائر يبدأ بالدليل " 032 " ثم يتبع بـ 6 أرقام أخرى . 1) ما هو عدد أرقام الهاتفية لهذه المنطقة ؟

2)) ما هو عدد أرقام الهاتفية المكونة من أرقام مختلفة ؟

3) ما هو عدد أرقام الهاتفية التي تتضمن الرقم 1 مرة واحدة ؟

4) أراد أحمد أن يهتف إلى صديقه محمد فتذكر أن الرقم الهاتفي لـ محمد مكون من 9 أرقام مختلفة ويعلم أيضا دليل المنطق 032 ويعلم أيضا الأرقام الثلاثة التي تأتي بعد الدليل والرقيم الأخير 6 .

كم رقم هاتفي يجب على أحمد تركيبه إذا أراد فعلا معرفة رقم هاتف صديقه .

الجزء الثاني

الاحتمالات

رب اشرح لي صدري و يسر لي أمري و احلل عقدة من لساني يفقهوا قولي

الاحتمالات

نقوم بتجربة عشوائية حيث لايمكن أن نتنبأ بصفة مؤكدة أي نتيجة ستحقق فعلا ، رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة .

مصطلحات

- تسمى مجموعة النتائج الممكنة بـ " مجموعة الإمكانيات "ويرمز لها بـ Ω . كل جزء من Ω يسمى بـ : " حادثة " .

المجموعة التي تحتوي عنصرا وحيد تسمى بالحادثة الأولية .

- A حادثة ما ، يرمزبـ $\overline{A}$ للحادثة العكسية لـ A وهي تحتوي كل عناصر Ω ماعدا عناصر A .

ليكن A و B حدثان . نرمز بـ $A \cap B$ للحادثة A و B وهي تحتوي العناصر المشتركة بين A و B . إذا تحقق A و B في آن واحد نقول بأن الحادثة $A \cap B$ قد تحققت . إذا كان $A \cap B = \varnothing$ نقول بأن الحادثتان A و B غير متلائمين .

نرمز بـ $A \cup B$ للحادثة A أو B وهي حادثة تحتوي عناصر A و B . إذا تحقق إحدى الحادثتين A أو B أوهما معا نقول بأن الحادثة $A \cup B$ قد تحققت .

- الحادثة الأكيدة هي الحادثة المحققة .
- الحادثة المستحيلة هي الحادثة التي لا يمكن تحقيقها .

قانون الاحتمال

ليكن $\Omega = \{a_1; a_2; ....; a_n\}$ مجموعة الإمكانيات(النتائج)لتجربة عشوائية . إذا ربطنا كل عنصر a_i من Ω بعدد حقيقي موجب p_i من المجال $[0;1]$ بحيث : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$ نقول بأننا عرفنا احتمالا p على Ω. يسمى العدد p_i احتمال الحادثة a_i .

احتمال حدث

احتمال الحادثة A ويرمز له بـ $p(A)$ هو مجموع احتمالات كل عناصر A .

ملاحظة : $p(\varnothing)=0$, $p(\Omega)=1$

خواص الاحتمالات

- من أجل كل حادثة A فإن : $0 \le p(A) \le 1$
- من أجل كل حادثتين A و B فإن :

$$p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$$

وإذا كانت الحادثتين A و B غير متلائمتين $p(A \cap B)=\varnothing$ فإن :

$$p(A \cup B)=p(A)+p(B)$$

- من أجل كل حادثة A فإن : $p(A)=1-p(\overline{A})$ حيث $\overline{A}$ هي الحادثة العكسية للحادثة A .
- إذا كانت الحادثة A جزء من B $(A \subset B)$ فإن : $p(A) \le p(B)$

حساب الاحتمال

لتكن $\Omega=\{a_1;a_2;...;a_n\}$ و p احتمال معرف على Ω. إذا كانت كل الحوادث الأولية $a_1, a_2, ..., a_n$ لها نفس الاحتمال فإن احتمال كل حادثة أولية هو : $p(a_i)=\frac{1}{n}$ (n عدد عناصر Ω) .

احتمال الحادثة A حيث A جزء من Ω هو : $p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}$

حيث : عدد عناصر A = $CardA$ وعدد عناصر Ω = $Card\Omega$

الاحتمال الشرطي

تعريف : A و B حادثتان حيث $p(A) \neq 0$.

احتمال الحادثة B علما أن الحادثة A محققة هو العدد $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

ونرمز له بـ : $p_A(B)$ أو $p(B/A)$ أي $p_A(B)=\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

خاصية :

A و B حادثتان بحيث $p(A) \neq 0$ و $p(B) \neq 0$ فإن :

$$p(A \cap B)=p(A) \times p_A(B)=p(B) \times p_B(A)$$

دستور الاحتمالات الكلية

Ω مجموعة الإمكانيات . $A_1, A_2, ..., A_n$ أجزاء من Ω.

نقول بأن هذه الحوادث تشكل تجزئة للمجموعة Ω إذا كان :

- $A_i \neq \varnothing$ لكل i بحيث : $1 \le i \le n$
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ لكل i و j بحيث $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n$ و $i \neq j$
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$

خاصية :

$A_1, A_2 ..., A_n$ تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة Ω و p احتمالا معرف على Ω. من أجل كل حادثة B لدينا :

$$p(B)=p(A_1 \cap B)+p(A_2 \cap B)+...+p(A_n \cap B)=$$

$$=p(A_1)\cdot p_{A_1}(B)+p(A_2)\cdot p_{A_2}(B)+...+p(A_n)\cdot p_{A_n}(B)$$

تسمى هذه العلاقة بـ :" دستور الاحتمالات الكلية " .

الحادثتان المستقلتان

نقول عن حادثتان A و B أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

ملاحظات :

1) A و B حادثتان مستقلتان يعني أن وقوع الحادثة A لا يتعلق بوقوع الحادثة B والعكس صحيح .

2) إذا كان $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ فإن :

$$p_A(B)=p(B) \quad و \quad p_B(A)=p(A)$$

3) إذا كانت A ، B ، C حوادث مستقلة فإن :

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p(B)\times p(C)$$

الاحتمالات المركبة

A و B حادثتان بحيث $p(A)\neq 0$ فإن :

* $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$.

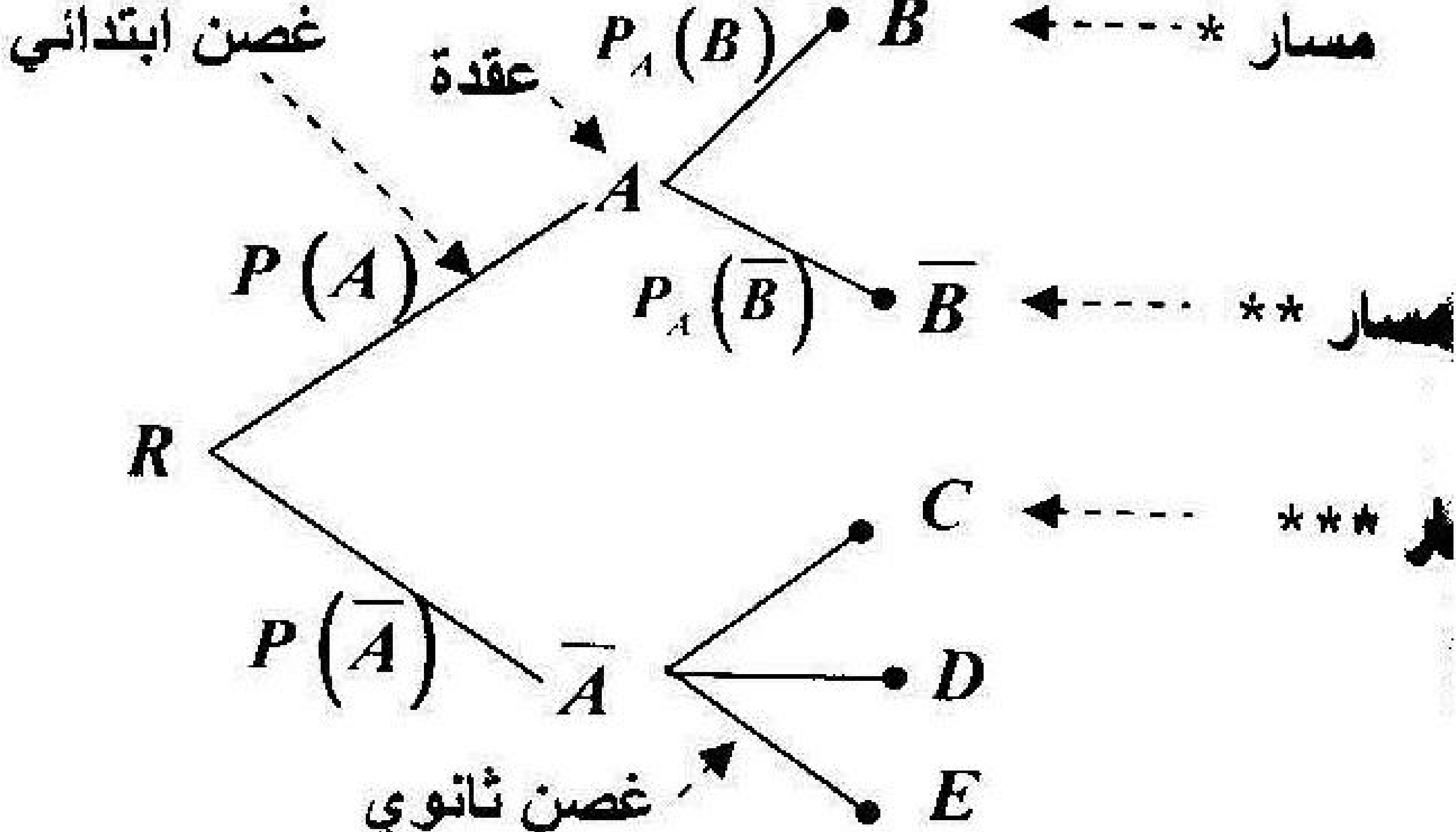
بصفة عامة A ، B ، C حوادث بحيث $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$

فإن : $p(A\cap B\cap C)=p(A)\times p_A(B)\times p_{A\cap B}(C)$.

تسمى العلاقة * مبدأ الاحتمالات المركبة ويمكن تمديدها إلى أكثر من حادثتين

استعمال شجرة الاحتمالات

عندما نفهم من المعطيات أن هناك عدة تفريعات يستحسن تكوين الشجرة المناسبة لها (شجرة الاحتمالات) . (أنظر الصفحة الموالية) الغصن الابتدائي الأول يمثل الحادثة A واحتمالها $p(A)$ ، والغصن الابتدائي الثاني يمثل الحادثة العكسية لـ A أي $\overline{A}$ واحتمالها $p(\overline{A})$.



الغصن الثانوي المنطلق من المنبع A نحو B يمثل الحادثة B ولحساب احتمالها يجب اعتبار أن الحادثة A قد وقعت(تحققت) إذن فهو الاحتمال الشرطي $p_A(B)$ وكذالك لحساب احتمال الحادثة $\overline{B}$ يجب حساب $p_A(\overline{B})$ وبنفس الطريقة نحسب احتمال الحوادث E,D,C .

المسارهو مكون من عدة غصون متتابعة. مثلا :

المسار * : $R\to A\to B$ والمسار ** : $R\to A\to\overline{B}$

إذا كان من عقدة ما ينبع غصنين فقط(ابتدائيين أو ثانويين) فيمكن اعتبارهما كحادثتان متعاكستان : A و $\overline{A}$ ، B و $\overline{B}$ ،. ...

لحساب الاحتمالات مستعملا الشجرة يجب معرفة القواعد الآتية:

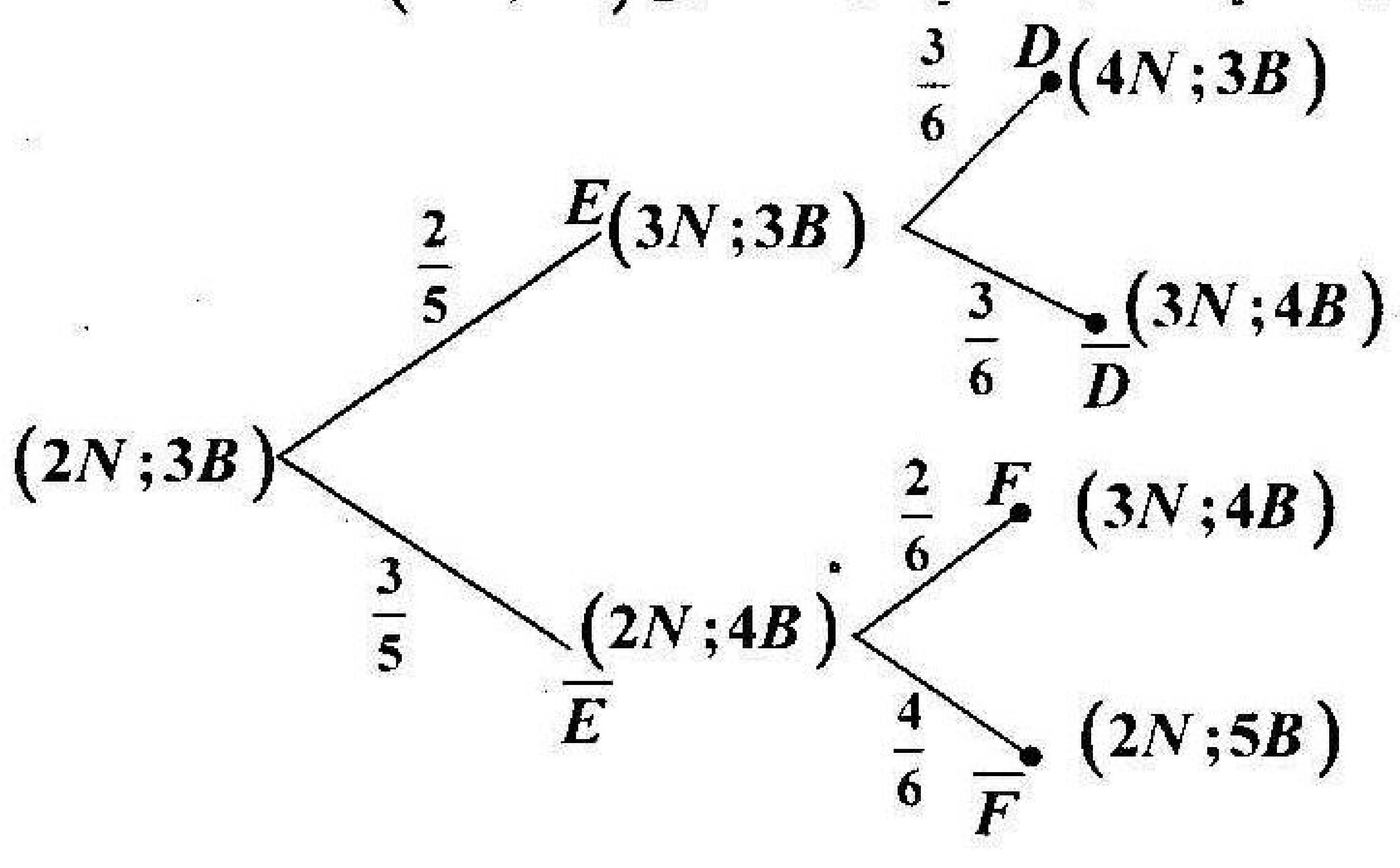
- مجموع احتمالات الغصون الابتدائية يساوي 1 .
- مجموع كل احتمالات الغصون الثانوية المنطلقة من نفس العقدة يساوي 1 .
- احتمال مسار ما ، هو جداء احتمالات الأغصان المؤدية إليه.
- لحساب احتمال حادثة ما نتبع المسارات المؤدية إليها عبر غصون الشجرة ويكون احتمال هذه الحادثة يساوي مجموع احتمالات هذه المسارات .

مثال :يحتوي صندوق على كرتين سوداء و 3 كرات بيضاء. نسحب عشوائيا كرة ثم نعيدها إلى الصندوق ونضيف معها كرة من نفس لون .
نقوم بسحب ثاني مشابها تماما للأول ونعتبر الحادثتين:
الحادثة A : يوجد في الصندوق 3 كرات سوداء قبل السحب الثالث .
الحادثةC : يوجد في الصندوق 5 كرات بيضاء قبل السحب الثالث .
احسب $p(A)$ و $p(C)$.

الحــل

نرمز للكرة البيضاء بـ B وللكرة السوداء بـ N وللصندوق قبل السحب الأول بالثنائية $(2N;3B)$. نعتبر الحادثة E : سحب كرة سوداء في السحب الأول ومنه : $p(E)=\frac{2}{5}$ و $p(\overline{E})=\frac{3}{5}$

ولتكن الحادثتين D و F حيث الحادثة D : سحب كرة سوداء في السحب الثاني من الصندوق $(3N;3B)$ و الحادثة F : سحب كرة سوداء في السحب الثاني من الصندوق $(2N;4B)$.



باستعمال المسارات المؤدية للحادثةA $(3N;4B)$ نستطيع حساب $p(A)$. لدينا مسارين تودي إلى $(3N;4B)$ إذن :

$$p(A)=p(E\cap\overline{D})+p(\overline{E}\cap F)=\left(\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\right)+\left(\frac{3}{5}\times\frac{2}{6}\right)=\frac{2}{5}$$

باستعمال المسار المؤدي للحادثة C $(2N;5B)$ نحسب $p(C)$

$$p(C)=p(\overline{E}\cap\overline{F})=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{5}$$

المتغير العشوائي

تعريف : Ω المجموعة الشاملة لتجربة عشوائية .
نسمي متغيرا عشوائيا كل دالة عددية معرفة على Ω.

قانون احتمال المتغير العشوائي

X متغير عشوائي يأخذ القيم $x_1, x_2, ..., x_n$.
قانون احتمال المتغير العشوائي X هي الدالة التي تربط كل قيمة x_i باحتمالها p_i و نكتب : $p_i=p(X=x_i)$.

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو العدد : $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

حيث x_i قيم X و $p_i=p(X=x_i)$.

التباين لمتغير عشوائي

التباين لمتغير عشوائي X هو العدد :

$V(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2\cdot p_i$ ويمكن كتابة التباين $V(X)$

على الشكل الآتي : $V(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-\left(E(X)\right)^2$

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي

الانحراف المعياري لمتغير عشوائي X هو : $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

قانون برنو لي

تعريف : نسمي تجربة برنو لي كل تجربة عشوائية ذات مخرجين متعاكسين S و $\overline{S}$ باحتمالين p و $1-p$ على الترتيب .

قانون احتمال المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمتين فقط :

$(X=1)$ إذا تحقق المخرج S أو $(X=0)$ إذا تحقق المخرج $\overline{S}$

يسمى قانون برنو لي .

x	0	1
$p(X=x)$	$1-p$	p

يسمى العدد p وسيط المتغير العشوائي X .

خاصية

ليكن X متغير عشوائي يتبع قانون برنولي بوسيط p فإن :

- الأمل الرياضي للمتغير X هو : $E(X)=p$

- التباين للمتغير X هو : $V(X)=p(1-p)$

مخطط برنولي - قانون الثنائي (ثنائي الحد)

نعتبر تجربة برنولي ذات المخرجين S (النجاح) و E (الرسوب) حيث $p(S)=p$ و $p(E)=1-p$.

عندما نكرر هذه التجربة n مرة نحصل على مخطط برنولي .

- نعرف قانون الثنائي الذي وسيطاه n و p كما يلي :

$p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ مع $k\in\{0,1,...,n\}$

ويمثل $p(X=k)$ احتمال الحصول على k مرة المخرج S عندما نكرر التجربة n مرة مستقلة .

- نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع قانون الثنائي بالوسيطين n و p إذا كان X يأخذ كقيمة عدد مرات تحقق المخرج S عند تكرار n مرة تجربة برنولي .

- الأمل الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X الذي يتبع قانون الثنائي هما معرفان كما يلي :

$E(X)=np$ و $V(X)=np(1-p)$

قوانين الاحتمالات المستمرة

1- الكثافة

تعريف : f دالة معرفة على المجال $[a;b]$.

نقول بأن الدالة f كثافة احتمال على المجال $[a;b]$ إذا تحقق الشروط الآتية : - f مستمرة على المجال $[a;b]$

- $f(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي من المجال $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \quad -$$

المتغير العشوائي والدالة الكثافة

تعريف: X متغير عشوائي معرف على المجال $[a;b]$ وقانون احتماله p . نقول بأن المتغير العشوائي X يقبل f دالة كثافة احتمال إذا كان من أجل كل عددين α و β من المجال $[a;b]$

لدينا : $p\left(X \in [\alpha;\beta]\right) = \int_a^b f(x)\,dx$

القانون الأسي

تعريف: نقول أن المتغير العشوائي X يتبع القانون الأسي ذي الوسيط λ إذا كانت دالة كثافة احتماله هي الدالة f المعرفة من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.



بعض التوجيهات خاصة بالاحتمالات

عدد الإمكانيات

- **السحب**

Ω المجموعة الشاملة تشمل n عنصرا . نسحب عشوائيا p عنصرا.

1- السحب في آن واحد : عدد الإمكانيات هو : $C_n^p \quad (p \le n)$

2- السحب على التوالي :

أ- بدون إرجاع : عدد الإمكانيات هو : $A_n^p \quad (p \le n)$

ب- بالرجع : عدد الإمكانيات هو : n^p

اللجان والمكاتب

Ω المجموعة الشاملة تشمل n فردا، نختار عشوائيا لجنة تشمل p فرد

أ- اللجان التي لايذكر فيها الوظيفة : عدد الإمكانيات هو : C_n^p

ب - اللجان التي يذكر فيها وظيفة الأعضاء (رئيس ، أمين ، ...)
عدد الإمكانيات هو : A_n^p

- **الرمي**

أ- رمي قطعة نقدية

إذا رمينا قطعة نقدية مرة واحدة فيكون لدينا احتمالين: الوجه (F) أو الظهر (P) وتكون مجموعة الإمكانيات هي $\Omega_1 = \{P;F\}$.

إذا رمينا القطعة النقدية n مرة وسجلنا بالترتيب الوجه الذي يظهر (F) أو (P) في كل مرة تكون مجموعة الإمكانيات هي $\Omega_n = {\Omega_1}^n$

وعدد عناصرها هو 2^n وكل عنصر يحتوي n حرفا (F) و (P)

مثلا : $(P;P;F;P;...;F)$ ، $(F;P;F;P;...;P)$.

ب - <u>رمي نرد</u>

إذا رمينا نرد الذي وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 فتكون مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega_1=\{1;2;3;4;5;6\}$ وإذا رمينا هذا النرد n مرة وسجلنا بالترتيب الأرقام التي ظهرت على الوجه العلوي في كل رمية فتكون مجموعة الإمكانيات هي $\Omega_n=\Omega_1{}^n$ وعدد عناصرها هو 6^n وكل عنصرا يكون مكون من n رقما . مثلا : إذا رمينا نرد 3 مرات متتالية فيكون عدد الإمكانيات هو 6^3 وكل عنصرا من مجموعة الإمكانيات يحتوي 3 أرقام

مثلا : $\{3;2;2\},\{3;1;2\},\{5;4;6\},....$

استعمال الحادثة العكسية في حساب الاحتمالات

إذا لحظنا أنه يمكن تجزئة مجموعة الإمكانيات إلى حادثتين وحادثتين فقط ، في هذه الحالة يمكن اعتبار إحدى الحادثتينA حادثة عكسية للأخرى ولحساب احتمال الحادثة A نطبق القاعدة :

$$p(A)=1-p(\overline{A})$$

الاحتمال الشرطي

يكون الاحتمال المطلوب احتمال شرطي إذا كان المفهوم اللغوي للجملة يوحي بأن هناك صيغة شرطية . نعبر غالبا عن الاحتمال الشرطي في التمارين بـ : علما أو شرطا أن الحادثة ... محققة .

التجارب التي هي من نموذج برنولي

طبيعة التجربة	نموذج برنولي $p(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$
السحب على التوالي وبالرجع	إعادة السحب n مرة بطريقة مستقلة
تجربة ما على فرد واحد	إعادة التجربة على n فرد بطريقة مستقلة
رمي النرد أو القطعة	رمي n مرة (النرد أو القطعة) بطريقة مستقلة
رمي النرد أو القطعة	رمي n نرد أو قطع في آن واحد

تمـــارين محـــلـــولـــة

تمرين 1

لعبة (Tiercé) هي لعبة سباق الخيل وتتمثل هذه اللعبة في اختيار 3مشاركين في السباق لاحتلال المراتب الثلاثة الأولى .
إذا كان عدد المشاركين في السباق هو12 ، أحسب الاحتمال لكي لاعب هذه اللعبة يربح (Tiercé) :
أ- في الترتيب الذي يطابق ترتيب نتيجة السباق .
ب- في الترتيب المخالف لترتيب نتيجة السباق .

تمرين 2

لعبة يانصيب تحتوي 100ورقة منها 3 أوراق تعطي ربح جوائز كبرى و12 ورقة تعطي ربح جوائز صغرى .
اشترى رجل 3 أوراق ، أحسب احتمال الحوادث الآتية :
1) الحادثة A : الرجل لايربح أية جائزة . الحادثة B : يربح الرجل 3 جوائز . الحادثة C : يربح الرجل جائزتان كبريان .
2) نفرض أن هذا الرجل قد ربح 3 جوائز ، ما هو الاحتمال كي تكون اثنتان منهما كبريان . 3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الجوائز الكبرى الذي قد يربحها هذا الرجل .
أعط قانون المتغيرX .

تمرين 3

نرد مزيف حيث كل وجهين يحملان نفس الرقم i حيث $i \in \{1;2;3\}$
نرمز بـ : z, y, x الاحتمالات التي تمثل على الترتيب ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 1، 2، 3 . 1) أحسب z, y, x علما أن هذه الأعداد هي متناسبة على الترتيب مع 2، 3، 5 . 2) نرمي هذا النرد مرتين على التوالي وليكن a الرقم الذي يظهر على وجه النرد في الرمية الأولى

وليكن b الرقم الذي يظهر في الرمية الثانية .
أحسب احتمال الحصول على كل ثنائية $(a;b)$.
3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي 1إذا كان $(a+b)$ من مضاعفات 3 ويساوي 2 إذا كان $a+b=4$ ويساوي 3 إذا كان $a-b=0$. حدد قانون المتغير العشوائي X .

تمرين 4

إذا كان احتمال نجاح صالح وأحمد في البكالوريا هو على الترتيب $\frac{1}{3}$ و $\frac{3}{4}$ ، أحسب الاحتمالات الآتية :
أ- أن ينجح الاثنان في البكالوريا .
ب- أن ينجح واحد منهما على الأقل.

تمرين 5

لدينا نردان A و B . النرد A مغشوش وله كل وجهين يحملان نفس الرقم i حيث $i \in \{1;2;3\}$. نرمز بـ p_i لاحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم i . 1- أحسب p_1, p_2, p_3 علما أنها تشكل 3 حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$. النرد B ليس مغشوشا وله كل ثلاثة وجوه تحمل نفس الرقم k حيث $k \in \{1;2\}$.
نرمز بـ p'_k لاحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k
2- أحسب p'_1, p'_2 . 3- نرمي في الهواء النردين في آن واحد ، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي مجموع رقمي الوجهين .
أعط قانون المتغير العشوائي .

تمرين 6
لدينا صندوقان A و B . الصندوق A يحتوي : 4 كرات حمراء ، 3 كرات بيضاء ، كرتان خضراوان .
الصندوق B يحتوي : كرتين حمراوين ، 4 كرات بيضاء .
نسحب 3 كرات بالكيفية الآتية : كرتان في آن واحد من الصندوق A وكرة واحدة من الصندوق B . 1- أحسب احتمال الحوادث الآتية :
الحادثة E : الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء .
الحادثة F : من بين الكرات الثلاث المسحوبة توجد كرتان خضراوان
2- نفرض أن بعد عملية السحب حصلنا على ثلاث كرات من بينها كرتان حمراوان ، مااحتمال كي تكون واحدة منهما من الصندوق B ؟
3- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات الخضراء المسحوبة من الصندوق A . حدد قانون المتغير X .

تمرين 7
قسم يحتوي 12 تلميذا و8 تلميذات . نريد تكوين أفواج عمل حيث كل فوج يحتوي على 5 أعضاء . 1- أحسب احتمال الحوادث الآتية :
الحادثة A : تلميذتان حنان وزينب من هذا القسم متخاصمتان لاتريدان أن تكونا معا في نفس الفوج .
الحادثة B : 3 صديقات يرغبن أن يكن معا في نفس الفوج .
الحادثة C : التلميذ أحمد موجود في الفوج .
الحادثة D : الفوج يحتوي على تلميذتين على الأكثر .
2 – نفرض أننا حصلنا على فوج فيه 3 ذكور ، ما احتمال كي يكون التلميذ أحمد موجود في الفوج .

تمرين 8
الجدول الآتي يعطي توزيع تلاميذ ثانوية أبو بكر الصديق .

الشعبة	علوم تجريبية	رياضيات	تقني رياضي
النسبة المؤوية لعدد التلاميذ	50%	35%	15%
النسبة المؤوية في النظام الداخلي	40%	60%	20%

نختار بطريقة عشوائية تلميذا .
1- ما احتمال أن يكون هذا التلميذ في النظام الداخلي ؟
2- إذا اخترنا بطريقة عشوائية تلميذا ووجدناه أنه في النظام الداخلي ما احتمال أن يكون من شعبة الرياضيات ؟
3- كون شجرة الاحتمالات المناسبة لهذه الوضعية وتحقق من إجابة السوال 1.

تمرين 9
D و E حادثتان حيث :

$$p(D)=\frac{2}{3}\ ,\ p(E)=\frac{1}{2}\ ,\ p(E\cap D)=\frac{1}{4}\ .$$

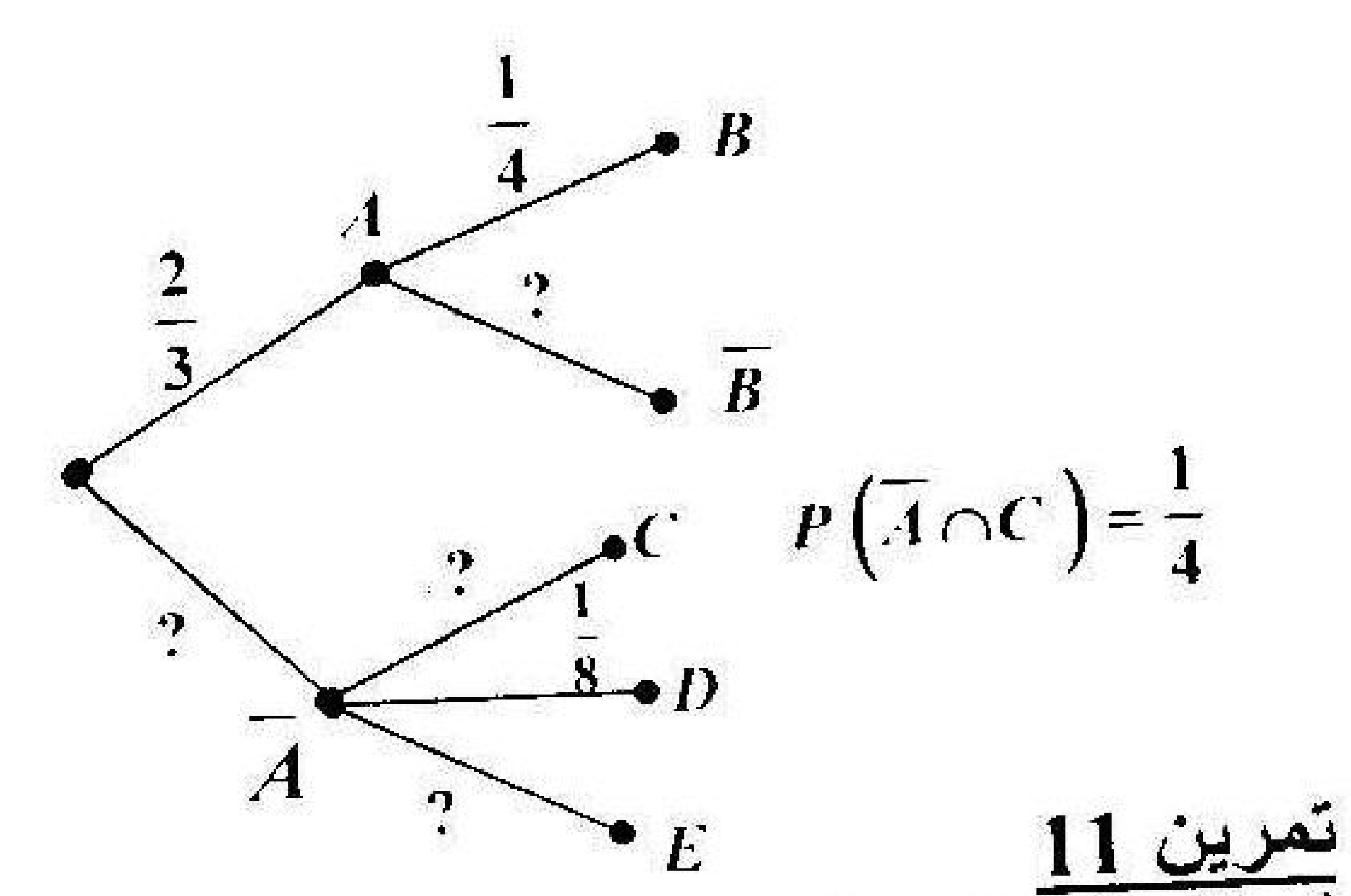
1- احسب :

$$p(\overline{E}\cap\overline{D})\ ,\ p_E(D)\ ,\ p_D(E)\ ,\ p(E\cup D)\ .$$

2- هل الحادثتان E و D مستقلتان ؟ .

تمرين 10
1- أكمل شجرة الاحتمالات الآتية : (أنظر إلى الصفحة الموالية) .
2- احسب :

$$p(A\cup B)\ ,\ p(\overline{A}\cap D)\ ,\ p(\overline{A}\cup C)\ ,\ p_{\overline{B}}(A)\ ,\ p(A\cap B)$$



تمرين 11

في ثانوية ما نجح 60% من التلاميذ في امتحان الرياضيات ، 70% من التلاميذ في امتحان الفيزياء ، 40% في امتحان الرياضيات والفيزياء . نختار عشوائيا تلميذا ونفرض أن جميع الاختيارات متساوية الاحتمال . احسب احتمال كل من الحوادث الآتية :

الحادثة A : التلميذ المختار ناجح في الرياضيات أو في الفيزياء

الحادثةB : التلميذ المختار ناجح في الفيزياء وغير ناجح في الرياضيات . الحادثةC : التلميذ المختار غير ناجح في الرياضيات وغير ناجح في الفيزياء .

تمرين 12

I. يتكون قسم من 18 ذكرا و12 إناثا (يوجد في هذا القسم التلميذ أحمد وأخته زينب) . نريد اختيارا عشوائيا 3 تلاميذ من هذا القسم لتكوين لجنة تمثل القسم . 1- ما هو عدد اللجان التي يمكن تكوينها ؟

2- احسب احتمال الحوادث الآتية :

أ- الحادثة A : الحصول على لجنة مختلطة .

ب- الحادثة B : الحصول على لجنة تظم على الأقل تلميذة

ج- الحادثة C : الحصول على لجنة لا تحتوي على أحمد وأخته معا .

3- نفرض أننا حصلنا على لجنة مختلطة فما هو الاحتمال كي تكون التلميذة زينب في اللجنة ؟

II. بعد الإطلاع على ملفات التلاميذ تبين أن 30% من الذكور و 50% من الإناث يسكنون الريف . نختار عشوائيا تلميذا من هذا القسم ونعتبر الحوادث الآتية :

G : "التلميذ من الذكور" . F : "التلميذ من الإناث"

D : "التلميذ يسكن في الريف" . $\overline{D}$: "التلميذ لا يسكن في الريف"

أ- احسب الاحتمالات الآتية :

$$p(G)\ ,\ p(G \cap D)\ ,\ p(F \cap D)\ ,\ p(D)$$

ب- نفرض أن التلميذ المختار هو ذكر، ما احتمال أنه يسكن الريف ؟

ج- ما احتمال أن يكون التلميذ المختار ذكرا علما أنه يسكن الريف ؟

د- ما احتمال أن يكون التلميذ المختار ذكرا ويسكن الريف ؟

تمرين 13

I. صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء مرقمة 1، 1 ، 2 و5 كرات حمراء مرقمة 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 . نسحب في آن واحد 3 كرات من الصندوق . 1- احسب احتمال الحوادث الآتية :

أ- الحادثة A : الكرات المسحوبة هي من نفس اللون .

ب- الحادثة B : الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم .

جـ - الحادثة C : الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم علما أنها من نفس اللون . 2- احسب $p_A(B)$

II. لدينا 3 صناديق u_1, u_2, u_3 . الصندوق u_1 يحتوي على كرة بيضاء و4 كرات حمراء . الصندوق u_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و3 كرات حمراء . الصندوق u_3 يحتوي على 3 كرات بيضاء وكرتين حمراوين . نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب منه عشوائيا كرة واحدة .

1- احسب احتمال الحادثة E : اختيار صندوق يحتوي على أكثر من كرتين حمراوين . 2- احسب احتمال الحادثة F : سحب كرة بيضاء .

3- احسب احتمال سحب كرة بيضاء علما أنها مسحوبة من صندوق يحتوي على أكثر من كرتين حمراوين .

تمرين 14

I. يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء .
نسحب عشوائيا وعلى التوالي وبدون إعادة 5 كرات من الصندوق .
احسب احتمال الحصول على أول كرة بيضاء في السحب الثالث .

II. نعتبر الصندوق في وضعيته الأولى وفي هذه المرة نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق وبدون إعادتهما إليه ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين أخريين .

1- احسب احتمال كل من الحادثتين التاليتين :
الحادثة E : الكرتان المسحوبتان في السحبة الأولى بيضاوين والكرتان المسحوبتان في السحبة الثانية حمراوين .
الحادثة F : يبقى في الصندوق بعد السحبة الثانية 3 كرات من نفس اللون . 2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء الباقية في الصندوق بعد السحبة الثانية .
أعط قانون المتغير X واحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

تمرين 15

نعتبر اللعبة الآتية : نضع في كيس 10 قريصات مرقمة : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 واللاعب يسحب على التوالي 4 قريصات بدون إرجاع القريصة المسحوبة إلى الكيس .
ترتب القريصات المسحوبة حسب ترتيب سحبهما من اليسار إلى اليمين يحصل اللاعب على عدد محصور بين 123 و 9876 .
1- ما هو عدد النتائج الممكنة ؟
2- بين أن احتمال الحصول على عدد مكون من 4 أرقام هو 0,9 .
في كل مرة اللاعب قد يربح أو يخسر وذلك حسب الشروط الآتية للعبة
- إذا تحصل على عدد أكبر من 9000 فيربح 50 دينار .

- إذا تحصل على عدد محصور بين 5000 و 9000 فيربح 30 دينار .
- إ ذا تحصل على عدد مكون من 4 أرقام وأقل من 5000 فيخسر20
- إذا تحصل على عدد مكون من ثلاثة أرقام فيخسر 30 دينار .

3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عدد المحصل عليه الربح أو (الخسارة) المناسبة. أ- ما هي القيم التي يأخذها المتغيرX
ب- أعط قانون احتمال X . جـ - احسب الأمل الرياضي

تمرين 16

لدينا نردان أوجههما مرقمة من 1 إلى 6 . نرمي هذين النردين معا .
نرمز بـ x و y إلى الرقمين التي تظهر على الوجهين العلويين .
1- احسب الاحتمال بأن يكون الجداء xy من مضعفات 5.
2- نرمي n مرة النردين معا . أ- احسب الاحتمال p_n للحصول على الأقل مرة واحدة الجداء xy من مضاعفات 5 .
ب- عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n من أجلها يكون $p_n \geq 0,99$.

تمرين 17

في ثانوية 55% من التلاميذ هم من الإناث . في نفس الثانوية 22% من الإناث و 18% من الذكور يدرسون اللغة الألمانية .
1- نختار بطريقة عشوائية تلميذا من هذه الثانوية .
أ- علما أن التلميذ المختار هو ذكر، احسب الاحتمال كي يكون هذا التلميذ يدرس الألمانية .
ب- احسب الاحتمال كي يكون التلميذ المختار يدرس الألمانية ويكون ذكرا . جـ - بين أن احتمال التلميذ المختار يدرس الألمانية هو 0,202 .
2- في هذه المرة نختار عشوائيا 5 تلاميذ من الثانوية .
أ- احسب الاحتمال كي لا أحد من 5 التلاميذ المختارين يدرس الألمانية.
ب- احسب الاحتمال كي الخمسة التلاميذ المختارين يدرسون الألمانية .
جـ - ما احتمال كي يكون 3 تلاميذ فقط من الخمسة المختارين يدرسون الألمانية .

تمرين18

في سنة 2000 ظهر مرض خطير ومجهول في بلد إفريقي .
نقدر أن 7% من سكان هذا البلد أصيبوا بهذا الداء . بعد سلسلة من البحوث الطبية توصل الأطباء إلى وضع تحليل طبي(Test) يشخص هذا المرض . إذا كان التحليل الطبي إيجابي فالشخص مريض وإذا كان سلبي فالشخص ليس مريض . وثبت أنه : - إذا كان الشخص مريضا فإن التحليل الطبي إيجابي في 87% من الحالات . - إذا كان الشخص ليس مريضا فإن التحليل الطبي سلبي في 98% من الحالات .
نرمز بـ F للحادثة : " الشخص مريض " و بـ T للحادثة : " التحليل الطبي للشخص إيجابي " .

1- احسب احتمال الحوادث الآتية :

أ- F و T ، ب- $\overline{F}$ و $\overline{T}$ ، جـ- F و $\overline{T}$

2- استنتج احتمال الحادثة T .

3- احسب الاحتمال كي شخص له تحليل طبي سلبي يكون مريض

تمرين 19

ورشة فيها آلتان M_1 و M_2 تصنع نفس القطع .
بعض القطع المصنوعة توجد فيها نقائص وتعتبر غير صالحة .
احتمال الحصول على قطعة صالحة هو 0,9 بالنسبة للآلة M_1 و 0,95 بالنسبة للآلة M_2 . الآلة M_1 أنتجت $\frac{2}{3}$ من الإنتاج الكلي والآلة M_2 أنتجت $\frac{1}{3}$ المتبقي . 1 – نختار بطريقة عشوائية قطعة مصنوعة ونقبل أن الاختيارات متساوية الاحتمال .

أ- احسب احتمال الحادثتين الآتيتين :

الحادثة A : القطعة أنتجت من طرف الآلة M_1 .

الحادثة B : القطعة أنتجت من طرف الآلة M_2 .
نعتبر الحادثة S : " القطعة المصنوعة صالحة " .

احسب $p_{M_1}(S)$ و $p_{M_2}(S)$ ثم استنتج أن : $p(S)=\frac{11}{12}$.

2- نأخذ عينة تحتوي 7 قطع مصنوعة من طرف الورشة ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد القطع الصالحة في العينة ونقبل أن X يتبع قانون الثنائي .

أ- احسب الاحتمال بأن لا توجد أية قطعة غير صالحة في هذه العينة .

ب- احسب الاحتمال كي يوجد في هذه العينة 6 قطع صالحة بالضبط

ج- استنتج احتمال وجود على الأقل قطعتين غير صالحتين "في العينة

تمرين 20

I. يحتوي صندوق على 10 كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس :
4 كرات بيضاء مرقمة 1 ، 1 ، 1 ، 2 وثلاثة كرات زرقاء مرقمة 1 ، 1 ، 2 وثلاثة كرات حمراء مرقمة 2، 2 ، 1 .
نسحب في آن واحد ثلاث كرات من الصندوق .

1- نعتبر الحادثتين التاليتين : الحادثة A : سحب كرة من كل لون والحادثة B : الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم .

أ- احسب الاحتمالات الآتية :

$$p(A)\ ,\ p(B)\ ,\ p(A\cap B)\ ,\ p_A(B)$$

ب- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ .

جـ - احسب احتمال الحادثةC : من بين الكرات المسحوبة توجد كرتان زرقاوان علما أن الحادثة B محققة .

II. نقوم بتجربة أخرى حيث نسحب 3 سحابات متتالية لـ 3 كرات في آن واحد من الصندوق (كل سحبة تحتوي على3 كرات) ، الكرات المسحوبة لا تعاد إلى الصندوق . نعتبر الحادثة T_i : نحصل

على ثلاثي الألوان في السحبة i حيث $i \in \{1;2;3\}$.

1- احسب $p(T_1)$ ثم $p(T_2)$ علما أن $p(T_1)$ محققة .

استنتج $p(T_1 \cap T_2)$. 2- احسب $p(T_1 \cap T_2 \cap T_3)$

تمرين 21

I. يحتوي كيس u_1 على ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين .

نسحب عشوائيا وعلى التوالي كرتين من الكيس وبارجاع الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .

1- احسب احتمال الحصول على :

أ- كرتين حمراوين . ب- كرتين مختلفتين في اللون .

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل سحبة كرتين(حسب الطريقة السابقة) بعدد الكرات السوداء . أعط قانون المتغير X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

3- نعيد التجربة الأولى (سحب كرتين على التوالي وبارجاع) 5 مرات متتالية . ما احتمال الحصول على كرتين حمراوين 3 مرات .

II. نعتبر كيس ثاني u_2 يحتوي كرتين حمراوين وكرتين سوداوين .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق u_1 وكرة من الصندوق u_2 . 1- ماحتمال سحب 3 كرات من نفس اللون .

2- اخترنا بطريقة عشوائية أحد الكيسين وسحبنا منه كرة واحدة .

أ- ماحتمال أن تكون هذه الكرة بيضاء .

ب- نفرض أن الكرة المسحوبة بيضاء ما احتمال أن تكون هذه الكرة مسحوبة من الكيس u_1

تمرين 22

نرد أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 . نرمي هذا النرد 4 مرات متتالية ونسجل في كل رمية الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي للنرد .

نفرض أن جميع الأوجه لها نفس الاحتمال في الظهور وأن الرميات الأربعة مستقلة . 1- ماحتمال ظهور الرقم 4 ثلاث مرات ؟

2- ماحتمال ظهور الرقم 4 على الأقل مرة واحدة ؟

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد مرات ظهور الرقم 4 في الأربع رميات المتتالية . 1- عين مجموعة الإمكانيات Ω

2- عين قانون احتمال المتغيرX .

3- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$.

تمرين 23

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و x كرة سوداء $(x \geq 2)$.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق .

ليكنX المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة

1- عرف قانون احتمال المتغيرX . 2- احسب $E(X)$.

3- احسب x حتى يكون : $P(x=0)=p(X=2)$.

4- نفرض أن في ما يأتي $x=3$.

نقوم بخمسة سحبات متتالية لكرتين في آن واحد وبالإرجاع (تعاد الكرتان إلى الصندوق بعد كل سحبة) .

احسب احتمال سحب مرة واحدة كرتين بيضاوين .

تمرين 24

I. صندوق u_1 يحتوي 4 كرات مرقمة 1 ، 2 ، 3 ، 4 .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق نكرر هذه التجربة 5 مرات متتالية ونعتبر المتغير العشوائيY الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1 في الخمس سحابات

1- عرف قانون احتمال Y محدد وسيطاه

2- احسب احتمال كل من الحادثتين :

الحادثة A : الحصول على 4 كرات تحمل الرقم 1 .

الحادثة B : الحصول على 4 كرات على الأكثر تحمل الرقم 1 .

II. نعتبر صندوق ثاني u_2 الذي يحتوي 5 كرات : ثلاثة تحمل الرقم 2 واثنان تحمل الرقم 3 . نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من u_1 وكرة من u_2 ، وليكن a الرقم المسجل على الكرة المسحوبة من u_1 وليكن b الرقم المسجل على الكرة المسحوبة من u_2 . نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل ثنائية $(a;b)$ المجموع $(a+b)$.

1- عين قانون احتمال المتغير X . 2- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري للمتغير X .

تمرين 25

1- نرمي 5 قطع نقدية في آن واحد . احسب احتمال الحصول على 3 مرات "وجه" و مرتين " ظهر" .

2- متغير عشوائي X يتبع قانون الثنائي .

إذا كان $E(X)=12$ و $V(X)=2,4$. عين n و p .

3- نرمي في آن واحد n نرد متشابه .

أ) احسب احتمال الحصول على مرة واحدة الرقم 6 .

ب) احسب احتمال الحصول على مرتين على الأقل على الرقم 6

تمرين 26

ملامس آلة كاتبة مكونة من 6 حروف متحركة و20 حرفا ساكنا .
شخص يضرب بطريقة عشوائية 6 حروف . مااحتمال الحصول على :

أ- 6 حروف متحركة . ب- 6 حروف ساكنة .

جـ - 3 حروف متحركة و3 حروف ساكنة .

تمرين 27

الجدول الآتي يعطي التوزيع للأهم الزمر الدموية لولاية ما من الوطن .

	O	A	B	AB
Rhésus+	37%	38,1%	6,2%	2,8%
Rhésus-	7%	7,2%	1,2%	0,5%

1- ما احتمال أن يكون شخص له دم من (-Rhésus) .

2- اخترنا بطريقة عشوائية 10 متبرعين بالدم . نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد المتبرعين الذين زمرتهم A .

احسب $p(X=4)$.

3- من أجل إجراء عملية جراحية احتاجت مصلحة جمع الدم للمستشفى على الأقل ثلاث أشخاص ذوي الزمرة O^+
تطوع لهذا العمل الإنساني 10 متبرعين وهم يجهلون زمرتهم الدموية احسب الاحتمال كي يكون من بين المتطوعين على الأقل ثلاث متبرعين زمرتهم O^+ لازمين لهذه العملية الجراحية .

تمرين 28

شخص له 10 مفاتيح غير قابلة للتمييز منها واحد فقط صالح لفتح باب منزله . في يوم ما ، أراد هذا الشخص فتح باب بيته فبدأ بتجربة المفاتيح حيث يعيد في كل مرة المفتاح الذي جربه إلى صرة المفاتيح قبل التجربة الموالية .

1- احسب الاحتمال كي الشخص يفتح الباب في التجربة الرابعة فقط .

2- في هذه المرة استعمل طريقة أخرى وهي تتمثل في تجريب المفتاح ثم وضعه في جانب آخر (لا يعيد المفتاح إلى صرة المفاتيح) وإكمال التجربة بالمفاتيح المتبقية . نرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يساوي عدد التجارب اللازمة لفتح الباب . حدد قانون المتغير X واحسب

الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$.

تمرين 29

يحتوي مخزن 3 أنواع من الآلات الكهرومنزلية :
M_1 , M_2 , M_3 وهي معبأة داخل علب من (الكارتون) .

نصف كمية المخزن هي من النوع M_1 و $\frac{1}{8}$ كمية المخزن هي من النوع M_2 وباقي كمية المخزن $\left(\frac{3}{8}\right)$ هي من النوع M_3 .

إذا علمنا أن في المخزن الآلات التي لونها أحمر تمثل : 13% من النوع M_1 و 5% من النوع M_2 و 10% من النوع M_3 .

نختار بطريقة عشوائية آلة كهرومنزلية .

1- احسب الاحتمال بأن تكون هذه الآلة من النوع M_3 .

2- مااحتمال أن تكون هذه الآلة حمراء علما أنها من النوع M_2 .

3- مااحتمال أن تكون هذه آلة ليست حمراء ؟

4- بعد الإطلاع على الآلة وجدنا أن لونها أحمر ، مااحتمال أن تكون من النوع M_1 ؟

تمرين 30

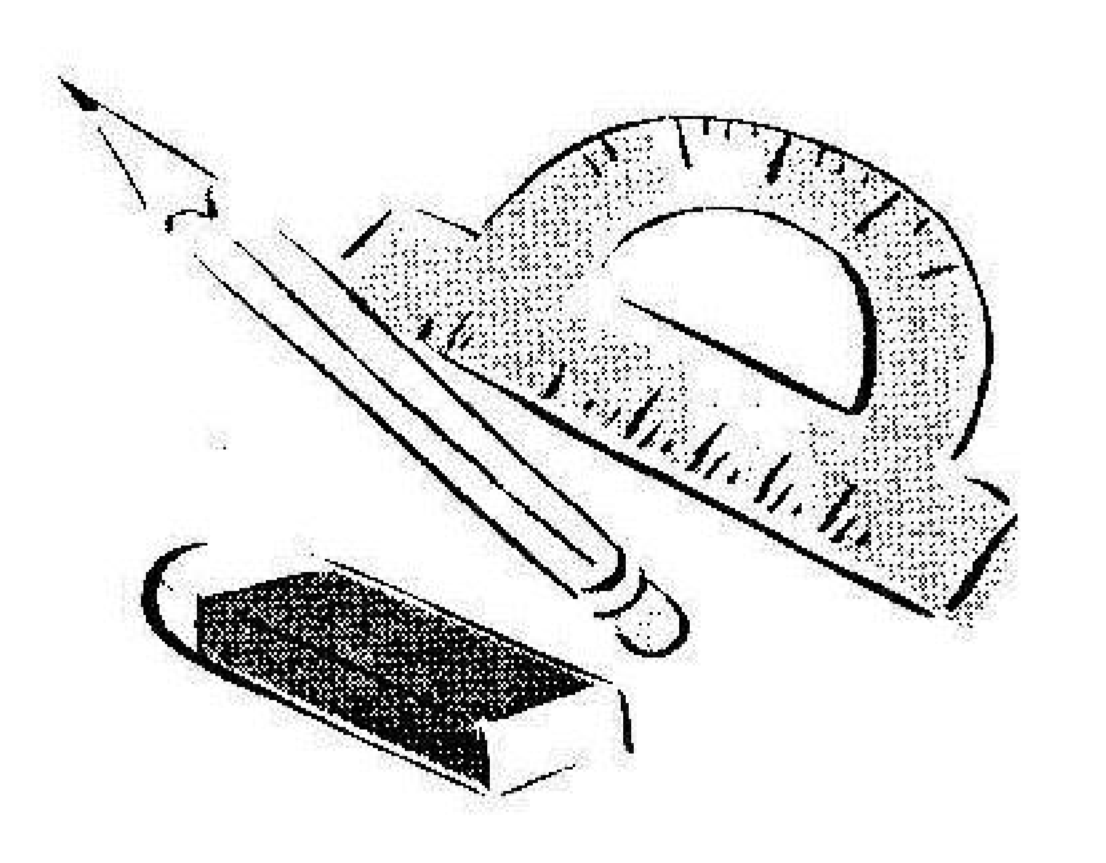
هدف مكون من منطقتين 1 و 2 كما يظهر في الشكل المقابل .

أطلق رام رميتين مستقلتين نحو هذا الهدف .

إذا علمت أن احتمال إصابة هذا الرامي المنطقة 2 هو $\frac{1}{6}$ ويسجل نقطتين واحتمال إصابة المنطقة 1 هو $\frac{1}{3}$ ويسجل نقطة واحدة .

1) احسب الاحتمال بأن لا يصيب الرامي الهدف .

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي مجموع النقاط المحصل عليها الرامي . عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي وانحرافه المعياري .



حلـول الـتماريــن

حل التمريـن 1

أ- عدد نتائج السباق هو عدد ترتيبات لـ 3 عناصر مختارة من بين 12 عنصرا أي: (نتيجة) $A_{12}^3 = 1320$.

من بين هذه النتائج توجد نتيجة وحيدة (ترتيبة وحيدة لثلاثة عناصر) تطابق ترتيبة نتيجة السباق ويكون الاحتمال المطلوب هو : $\frac{1}{1320}$.

ب) إذا كان (a,b,c) هي نتيجة السباق ، فيكون الترتيب المخالف لهذه النتيجة هو :

$$(b,a,c)\ ,(a,c,b)\ ,(c,a,b)\ ,(b,c,a)\ ,(a,b,c)$$

وهي تمثل 5 نتائج ويكون الاحتمال المطلوب هو : $\frac{5}{1320}$.

حل التمريـن 2

1) عدد الحالات الممكنة هو عدد التوفيقات لـ 3 عناصر مختارة من بين 100 أي : $C_{100}^3 = 161700$.

احتمال الحادثة A: $p(A) = \frac{C_{85}^3}{C_{100}^3} = \frac{98770}{161700} = \frac{1411}{2310}$

احتمال الحادثة B : $p(B) = \frac{C_{15}^3}{C_{100}^3} = \frac{455}{161700} = \frac{13}{4620}$

احتمال الحادثة C : $p(C) = \frac{C_3^2 \times C_{85}^1}{C_{100}^3} = \frac{255}{161700} = \frac{17}{10780}$

2) من صيغة السؤال يتضح أن الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي : احتمال الحادثة C علما أن الحادثة B محققة أي $p_B(C)$

ونعلم أن : $p_B(C) = \frac{p(C \cap B)}{p(B)}$. الحادثة $(C \cap B)$ تمثل ربح 3 جوائز منها جائزتان كبريان ومنه :

$$p(C \cap B) = \frac{C_3^2 \times C_{12}^1}{C_{100}^3} = \frac{36}{161700} = \frac{3}{13475} .$$

إذن : $p_B(C) = \frac{3}{13475} \div \frac{13}{4620} = \frac{396}{5005}$

3- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 ، 2 ، 3 .

$$p(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_{97}^2}{C_{100}^3} = \frac{13968}{161700} = \frac{3492}{40425}$$

$$p(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_{97}^1}{C_{100}^3} = \frac{291}{161700} = \frac{97}{53900}$$

$$p(X=3) = \frac{C_3^3}{C_{100}^3} = \frac{1}{161700}$$

حل التمريـن 3

1- بما أن z, y, x متناسبة مع 2 ، 3 ، 5 على الترتيب فإن :

$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ ونعلم $x + y + z = 1$ (مجموع كل الاحتمالات هو1)

ومنه : $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{1}{10}$

$$x=\frac{1}{5} \quad , \quad y=\frac{3}{10} \quad , \quad z=\frac{1}{2}$$

2- بما أن نتيجة الرمية الأولى لا تؤثر على نتيجة الرمية الثانية ، فالحادثتان مستقلتان ومنه احتمال الحصول على الثنائية $(a;b)$ هو $p(a)\times p(b)$.

$$p(1;1)=p(1)\times p(1)=\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$p(2;1)=p(1;2)=p(1)\times p(2)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{50} \ ,$$

$$p(3;1)=p(1;3)=p(1)\times p(3)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$$

$$p(2;2)=p(2)\times p(2)=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$$

$$p(2;3)=p(3;2)=p(2)\times p(3)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$$

$$p(3;3)=p(3)\times p(3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

3- $(a+b)$ من مضاعفات 3 يعني :

$(a;b)\in\{(1;2),(2;1),(3;3)\}$ ومنه :

$$p(X=1)=2\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{37}{100}$$

$a+b=4$ يعني $(a;b)\in\{(1;3),(3;1),(2;2)\}$ ومنه :

$$p(X=2)=2\times\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{29}{100}$$

$a-b=0$ يعني $(a;b)\in\{(1;1),(2;2),(3;3)\}$ ومنه :

$$p(X=3)=\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{19}{50}$$

حل التمرين 4

احتمال نجاح صالح هو $\frac{1}{3}$ ويكون احتمال عدم نجاحه هو :

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ (عدم نجاح صالح يمثل الحادثة العكسية لنجاحه) .

احتمال عدم نجاح أحمد هو : $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$. بما أن نتيجة نجاح أحمد لا تؤثر على نجاح صالح فالحادثتان مستقلتان .

أ- احتمال نجاح الاثنين في البكالوريا هو : $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

ب- احتمال نجاح واحد منهم على الأقل هو :

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{6}$$

حل التمرين 5

1- نعلم أن $p_1+p_2+p_3=1$ (مجموع كل الاحتمالات). وبما أن p_1 , p_2 , p_3 هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$ فإن :

$p_1 + p_2 + p_3 = 3p_2 = 1$ ومنه $p_2 = 1/3$ و منه

$p_1 = p_2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ و $p_3 = p_2 + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

2- لدينا 3 وجوه تحمل الرقم 1 و 3 وجوه تحمل الرقم 2 ومنه :

$p'_1 = p'_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3- القيم التي يأخذها المتغير العشوائيX هي : 2 ، 3 ، 4 ، 5 .
بما أن نتيجة النرد A لا تؤثر على نتيجة النرد B فالحادثتان هما مستقلتان ومنه :

$$p(X=2) = p_1 \times p'_1 = \frac{1}{12}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{24} \quad (A(1),B(1))$$

$$p(X=3) = p'_1 \times p_2 + p_1 \times p'_2 = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\times\frac{1}{2} = \frac{5}{24}$$

$$(A(1);B(2)) \ ,(A(2);B(1))$$

$$p(X=4) = p_2 \times p'_2 + p_3 \times p'_1 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{7}{12}\times\frac{1}{2} = \frac{11}{24}$$

$$(A(2);B(2)) \ ,(A(3);B(1))$$

$$P(X=5) = p_3 \times p'_2 = \frac{7}{12}\times\frac{1}{2} = \frac{7}{24} \quad (A(3);B(2))$$

حل التمرين 6

1- عدد الطرق لسحب 3 كرات بالكيفية المذكورة هو : $C_9^2 \times C_6^1 = 216$. الحادثة E محققة لما نسحب كرتين بيضاوين من الصندوق A وكرة بيضاء من الصندوقB ومنه :

$p(E) = \frac{C_3^2 \times C_4^1}{216} = \frac{1}{18}$. الحادثة F محققة لما نسحب كرتين خضراوين من A وكرة منB ومنه : $p(F) = \frac{C_2^2 \times C_6^1}{216} = \frac{1}{36}$

2) لتكن الحادثة G : سحب 3 كرات من بينها كرتان حمراوان ، وتكون الحادثة G محققة لما نسحب كرتين حمراوين من A وكرة ليست حمراء منB أو سحب كرة حمراء من A وسحب كرة حمراء أخرى منB ومنه :

$$p(G) = \frac{C_4^2 \times C_4^1 + C_4^1 \times C_5^1 \times C_2^1}{216} = \frac{8}{27}$$

لتكن الحادثة H : من بين الكرات الثلاثة المسحوبة توجد كرة حمراء مسحوبة من الصندوق B . الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي : احتمال الحادثة H علما أن الحادثة G محققة أي $p_G(H)$ ومنه :

$p_G(H) = \frac{p(G \cap H)}{p(G)}$. الحادثة $G \cap H$ تمثل سحب 3 كرات من بينها كرتان حمراوان إحداهما مسحوبة من الصندوق B ومنه

$p(G \cap H) = \frac{(C_4^1 \times C_5^1) \times C_2^1}{216} = \frac{5}{27}$ ومنه :

$p_G(H) = \frac{5}{27} \div \frac{8}{27} = \frac{5}{8}$.

3- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2

$$p(X=0) = \frac{C_7^2 \times C_6^1}{216} = \frac{7}{12} \ , \ p(X=2) = \frac{C_2^2 \times C_6^1}{216} = \frac{1}{36}$$

$$p(X=1)=\frac{C_2^1\times C_7^1\times C_6^1}{216}=\frac{7}{18}$$

حل التمرين 7

1) عدد الأفواج التي تحتوي حنان وزينب معا هو $C_{18}^3 = 816$ ويكون عدد الأفواج التي لا تحتوي حنان وزينب معا هو:

$C_{20}^5 - 816 = 15504 - 816 = 14688$ ومنه

$$p(A)=\frac{14688}{C_{20}^5}=\frac{14688}{15504}=\frac{306}{323}.$$

لتحقيق الحادثة B يجب اختيار تلميذين فقط من بين 17 تلميذ لإتمام الفوج ومنه : $p(B)=\frac{C_{17}^2}{C_{20}^5}=\frac{1}{114}$.

لتحقيق الحادثة C يجب اختيار 4 تلاميذ من 19 مع أحمد لإتمام الفوج ومنه : $p(C)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^5}=\frac{1}{4}$.

تلميذتين على الأكثر يعني الفوج يحتوي تلميذتين أو تلميذة او لا توجد فيه أية تلميذة ومنه :

$$p(C)=\frac{C_{12}^5+\left(C_8^1\times C_{12}^4\right)+\left(C_8^2\times C_{12}^3\right)}{C_{20}^5}=\frac{682}{969}$$

2- لتكن الحادثة H : الفوج يحتوي 3 ذكور ويكون الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي : احتمال الحادثة C علما أن الحادثة H محققة

ومنه $p_H(C)=\frac{p(H\cap C)}{p(H)}$. الحادثة $H\cap C$ تمثل فوج يوجد فيه 3 ذكور من بينهم التلميذ أحمد ومنه :

$$p(H\cap C)=\frac{C_{11}^2\times C_8^2}{C_{20}^5}=\frac{1540}{15504}=\frac{385}{3876}$$

ولدينا $p(H)=\frac{C_{12}^3\times C_8^2}{C_{20}^5}=\frac{385}{969}$ ومنه

$$p_H(C)=\frac{385}{3876}\div\frac{385}{969}=\frac{969}{3876}=\frac{1}{4}$$

حل التمرين 8

1- لنرمز بـ : S ، M ، T للحوادث الآتية :

" S " التلميذ المختار هو من شعبة العلوم .

" M " التلميذ المختار هو من شعبة الرياضيات .

" T " التلميذ المختار هو من شعبة تقني رياضي .

نعتبر الحادثة A : التلميذ المختار في النظام الداخلي .

لدينا حسب المعطيات :

$$p(S)=0,5\ ,\ p(M)=0,35\ ,\ p(T)=0,15$$

$$p_S(A)=0,4\ ,\ p_M(A)=0,6\ ,\ p_T(A)=0,2$$

بما أن الحوادث S ، M ، T تشكل تجزئة لمجموعة تلاميذ القسم فإن حسب دستور الاحتمالات الكلية لدينا :

$$p(A)=p(S\cap A)+p(M\cap A)+p(T\cap A)=$$

$$=p(S)\cdot p_S(A)+p(M)\cdot p_M(A)+p(T)\cdot p_T(A)=$$

$$= 0,5\times 0,4 + 0,35\times 0,6 + 0,15\times 0,2 = 0,44$$

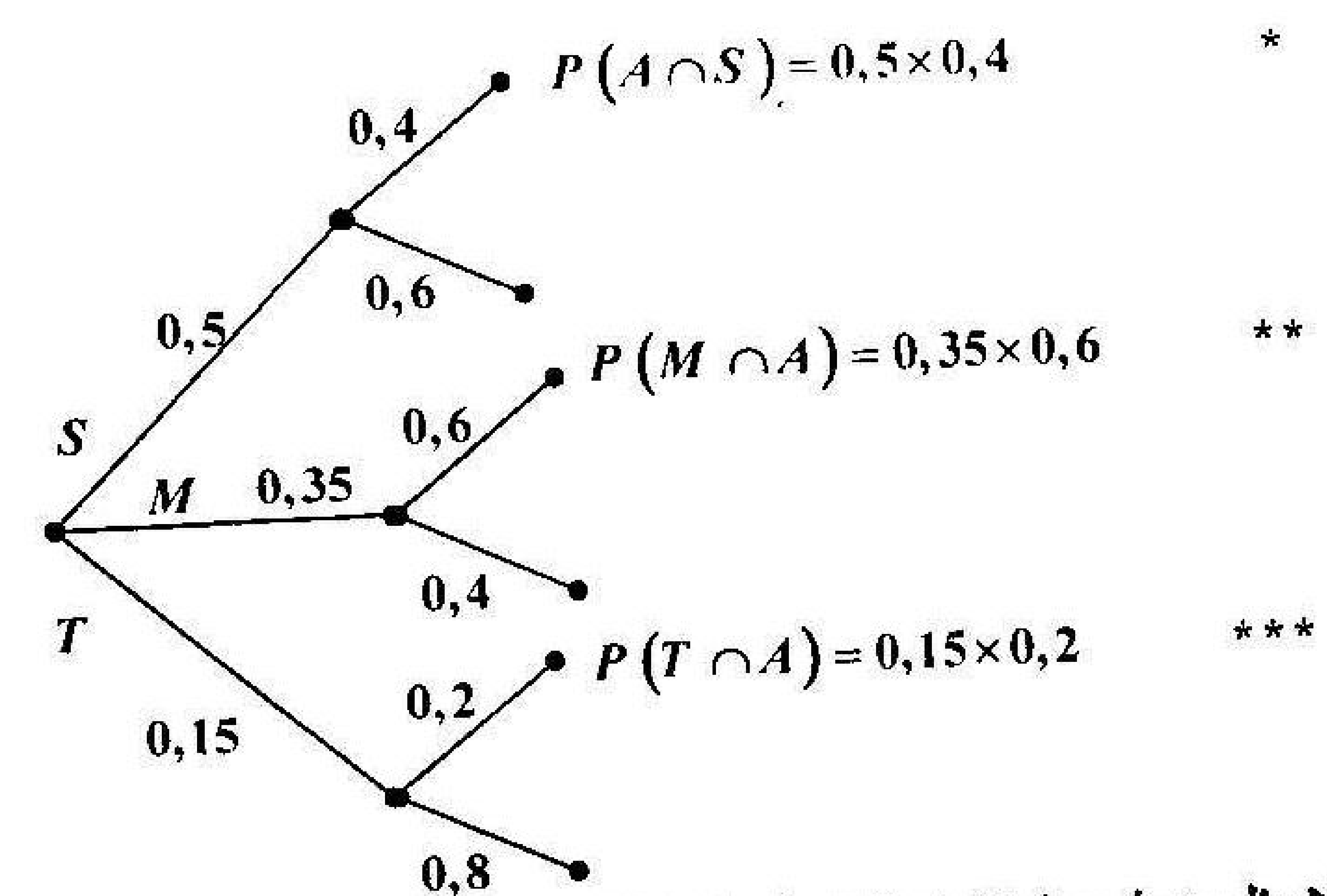
إذن احتمال أن التلميذ المختار يكون في النظام الداخلي هو $0,44$

- احتمال أن يكون التلميذ المختار من شعبة الرياضيات علما أنه في النظام الداخلي هو الاحتمال الشرطي :

احتمال تحقق الحادثة M علما أن الحادثة A محققة أي $p_A(M)$.

$$p_A(M)=\frac{p(M\cap A)}{p(A)}=\frac{p(M)\cdot p_M(A)}{p(A)}=\frac{0,35\times 0,6}{0,44}$$

3- شجرة الاحتمالات المناسبة .



نلاحظ من شجرة الاحتمالات أن الحادثة A مكونة من ثلاث مسارات : ***, **, * إذن $p(A)$ هي مجموع احتمالات هذه المسارات أي : $0,5\times 0,4+0,35\times 0,6+0,15\times 0,2=0,44$ وهي النتيجة المحصل عليها في السؤال 1- .

حل التمرين 9

$$p(E\cup D)=p(E)+p(D)-p(E\cap D)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$$

$$p_D(E)=\frac{p(E\cap D)}{p(D)}=\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$

نعلم أن الحادثة $(\overline{D}\cap\overline{E})$ تمثل الحادثة العكسية للحادثة $(D\cup E)$

ومنه $p(\overline{D}\cap\overline{E})=1-p(D\cup E)=1-\frac{11}{12}=\frac{1}{12}$

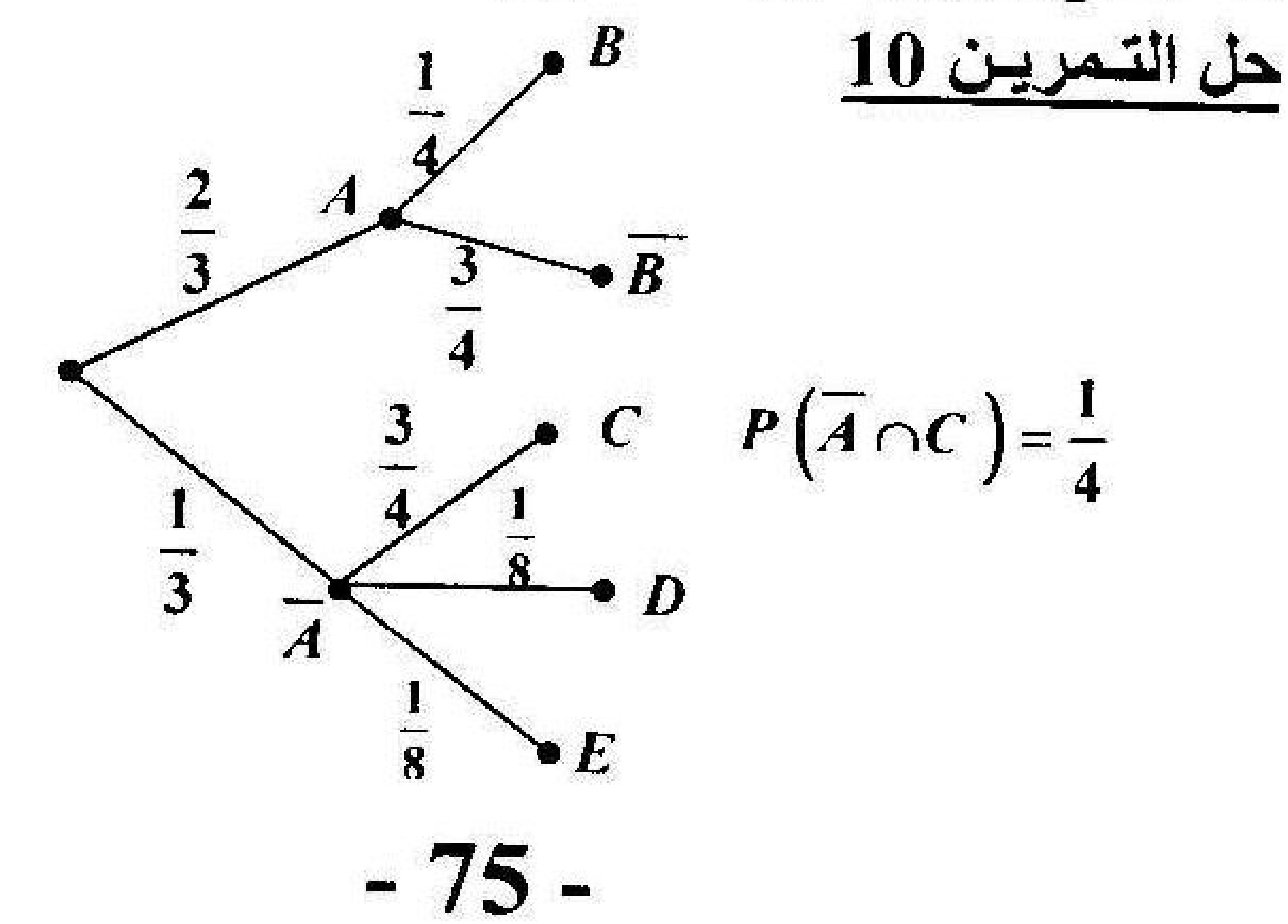
2- تكون الحادثتان E و D مستقلتان إذا تحقق ما يلي :

$p(E\cap D)=p(E)\times p(D)$. لدينا $p(E)\times p(D)=\frac{1}{3}$

و $p(E\cap D)=\frac{1}{4}$ وبما أن $p(E\cap D)\neq p(E)\times p(D)$

فالحادثتان D و E غير مستقلتان .

حل التمرين 10



$$p_{\overline{B}}(A)=\frac{p(A\cap\overline{B})}{p(\overline{B})}=\frac{p(A)\cdot p_A(\overline{B})}{p(\overline{B})}=\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$$

(2 $$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

$$p(\overline{A}\cup C)=p(\overline{A})+p(C)-p(\overline{A}\cap C)=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{6}$$

$$p(\overline{A}\cap D)=p(\overline{A})\times p_A(D)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$$

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$$

حل التمرين 11

نرمز بـ M للحادثة : التلميذ ناجح في الرياضيات ،
وبـ S للحادثة : التلميذ ناجح في الفيزياء .

لدينا : $p(M)=0,6$, $p(S)=0,7$, $p(M\cap S)=0,4$

$$P(A)=p(M\cup S)=p(M)+p(S)-p(M\cap S)=$$
$$0,6+0,7-0,4=0,9$$

$$p(B)=p(S\cap\overline{M})=p(S)-p(S\cap M)=0,7-0,4=0,3$$

$$P(\overline{M}\cap\overline{S})=1-p(M\cup S)=1-p(A)=0,1$$

لأن الحادثة $(\overline{M}\cap\overline{S})$ هي الحادثة العكسية للحادثة $(M\cup S)$

حل التمرين 12

I. 1- عدد اللجان التي يمكن تكوينها يساوي عدد التوفيقات لـ 3 عناصر مختارة من بين 30 عنصرا أي: (لجنة) $C_{30}^{3}=4060$.

2 – أ $p(A)=1-p(\overline{A})$ حيث $\overline{A}$ تمثل الحادثة العكسية لـ A .

$\overline{A}$ تمثل لجنة تظم ثلاثة تلاميذ من نفس الجنس ومنه :

ومنه : $p(\overline{A})=\frac{C_{18}^{3}+C_{12}^{3}}{4060}=\frac{816+220}{4060}=\frac{37}{145}$

. $p(A)=1-\frac{37}{145}=\frac{108}{145}$

ب- $p(B)=1-p(\overline{B})$

حيث $\overline{B}$ هي الحادثة العكسية لـ B وهي تمثل لجنة لا يوجد فيها أية تلميذة أي لجنة تظم 3 تلاميذ ذكور.

$p(\overline{B})=\frac{C_{18}^{3}}{4060}=\frac{204}{1015}$ ومنه $p(B)=1-\frac{204}{1015}=\frac{811}{1015}$

يمكن حساب $p(B)$ بطريقة أخرى وهي تتمثل في اختيار لجنة تظم تلميذة أو تلميذتين أو ثلاثة تلميذات .

ج- اللجنة التي تظم أحمد وأخته زينب يتم تشكيلها باختيار تلميذ واحد من بين 28 تلميذ (بدون أحمد وزينب) ويكون عندئذ عدد اللجان التي تظم الأخوين معا هو $C_{28}^{1}=28$ واحتمال الحصول على لجنة من هذا الشكل هو $\frac{28}{4060}=\frac{1}{145}$ ويكون احتمال الحصول على لجنة لا تظم احمد وزينب معا هو : $p(C)=1-\frac{1}{145}=\frac{144}{145}$

3- لنرمز بـ E للحادثة : التلميذة زينب موجودة في اللجنة .

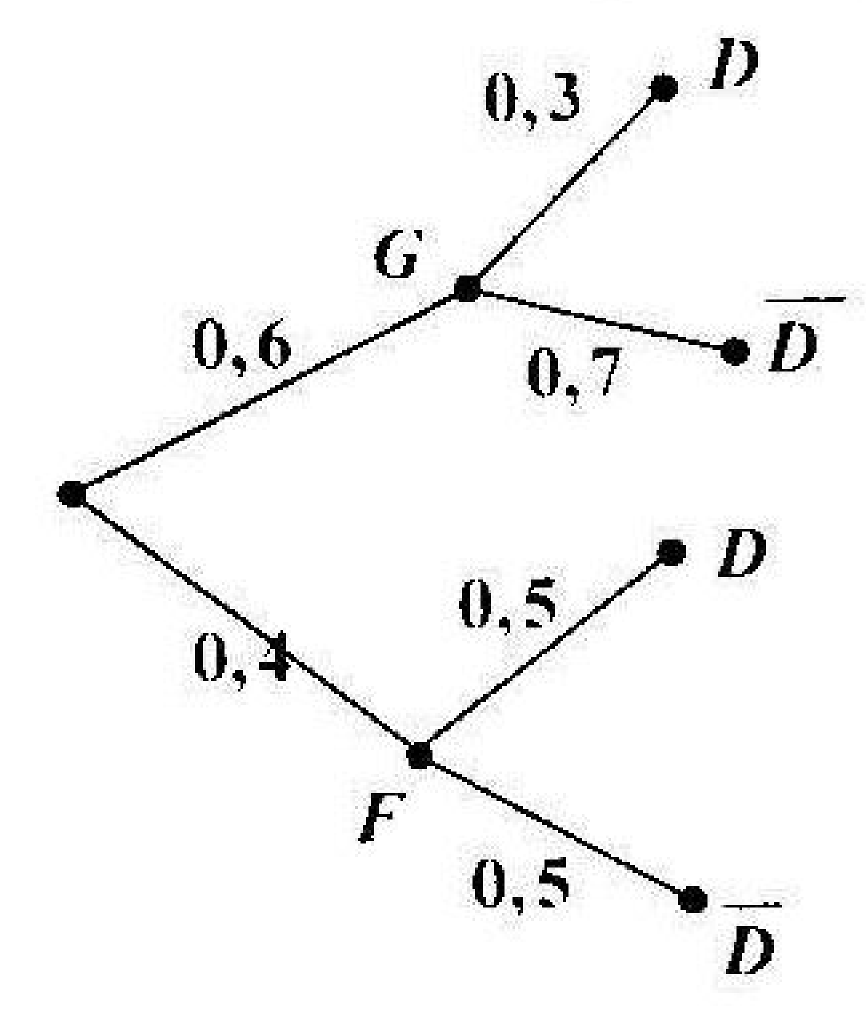
احتمال أن التلميذة زينب تكون في اللجنة علما أن هذه اللجنة مختلطة هو الاحتمال الشرطي $p_A(E)$ ومنه : $p_A(E)=\dfrac{p(A\cap E)}{p(A)}$

الحادثة $(A\cap E)$ تمثل لجنة مختلطة وفيها التلميذة زينب وهذه اللجنة يتم تشكيلها كما يلي : زينب وتلميذة وتلميذ أو زينب وتلميذين وعدد هذه اللجان هو : $\left(C_{11}^1\times C_{18}^1\right)+C_{18}^2=198+153=351$

ومنه $p(A\cap E)=\dfrac{351}{4060}$ و $p_A(E)=\dfrac{351}{4060}\div\dfrac{108}{145}=\dfrac{13}{112}$

II. $p(G)=\dfrac{18}{30}=0,6$ ، $p(F)=0,4$

$$p(G\cap D)=0,6\times0,3=0,18\ ,\ p(F\cap D)=0,4\times0,5=0,2$$



لحساب $p(D)$ يمكن استعمل شجرة الاحتمالات أو استعمال دستور الاحتمالات الكلية لأن F و G تشكلان تجزئة لمجموعة تلاميذ القسم

$$p(D)=p(G\cap D)+p(F\cap D)=0,18+0,2=0,38$$

ب- احتمال أن التلميذ المختار يسكن الريف علما أنه ذكر هو الاحتمال الشرطي $p_G(D)$ ومنه :

$$p_G(D)=\frac{p(G\cap D)}{p(G)}=0,18\div0,6=0,3$$

ج- احتمال أن التلميذ المختار ذكرا علما أنه يسكن الريف هو الاحتمال الشرطي $p_D(G)$ ومنه :

$$p_D(G)=\frac{p(G\cap D)}{p(D)}=0,18\div0,38=0,473$$

د- احتمال أن يكون التلميذ المختار ذكرا ويسكن الريف هو: $p(G\cap D)=0,18$.

حل التمرين 13

I. أ - الكرات الثلاثة المسحوبة هي من نفس اللون يعني تكون بيضاء أو حمراء .

$$p(A)=\frac{C_3^3}{C_8^3}+\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}+\frac{10}{56}=\frac{11}{56}$$

ب-الكرات الثلاثة تحمل نفس الرقم يعني تحمل الرقم 1 أو الرقم2 .

$$p(B)=\frac{C_3^3}{C_8^3}+\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}+\frac{10}{56}=\frac{11}{56}$$

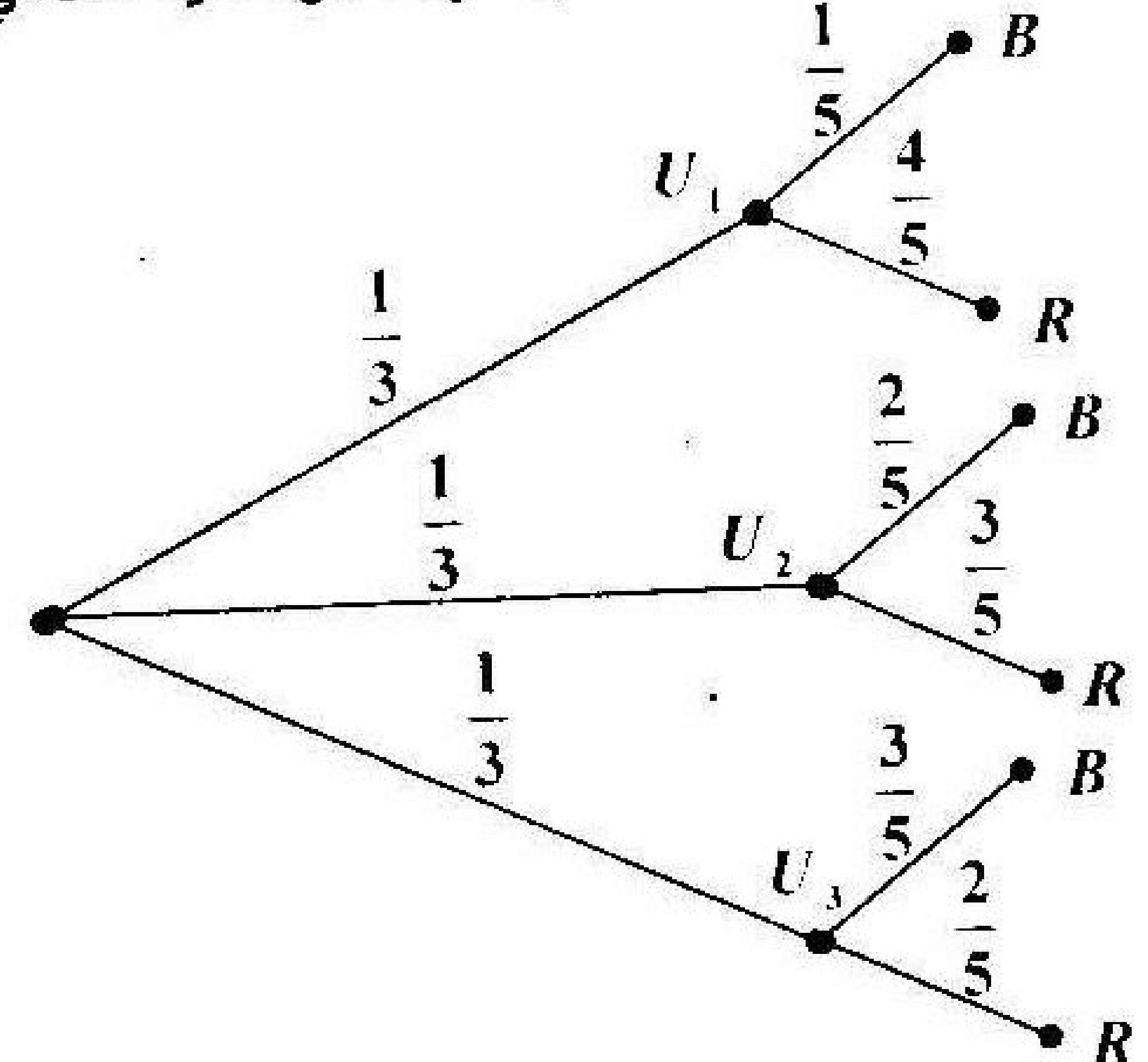
ج- احتمال سحب ثلاثة كرات تحمل نفس الرقم علما أنها من نفس اللون هو الاحتمال الشرطي $p_A(B)$. نعلم أن : $p_A(B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$

الحادثة $(A \cap B)$ هي سحب 3 كرات تحمل نفس الرقم ولها نفس اللون ويتحقق هذا لما نسحب 3كرات حمراء تحمل الرقم 1 .

ومنه $p(A \cap B) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$ إذن : $p_A(B) = \frac{1}{56} \div \frac{11}{56} = \frac{1}{11}$

-2 $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{56} \div \frac{11}{56} = \frac{1}{11}$

II. 1) لدينا 3 صناديق واختيار عشوائيا واحد منهم هو $\frac{1}{3}$. بما أن لدينا صندوقين يحتويان على أكثر من كرتين حمراوين والاختيار يتم بطريقة عشوائية فإن : $p(E) = \frac{2}{3}$. لنرمز بـ B للكرة البيضاء وبـ R للكرة الحمراء . تكون شجرة الاحتمالات المناسبة لهذه الوضعية كالآتي :



2)- من شجرة الاحتمالات نستنتج حساب احتمال سحب كرة بيضاء .

$$p(F) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

3- احتمال سحب كرة بيضاء علما أنها مسحوبة من صندوق يحتوي على أكثر من كرتين حمراوين هو الاحتمال الشرطي $p_E(F)$.

ونعلم أن : $p_E(F) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)}$. الحادثة $(F \cap E)$ تمثل سحب كرة بيضاء ومن الصندوق الذي يحتوي على أكثر من كرتين حمراوين ويتحقق هذا لما نسحب كرة بيضاء من الصندوق u_1 أو u_2 .

ومنه : $p(F \cap E) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}$

ومنه : $p_E(F) = \frac{1}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$

حل التمرين 14

I. الحصول على أول كرة بيضاء في السحبة الثالثة يعني الكرتان المسحوبتان الأولى والثانية هي حمراء . لنعتبر الحوادث الآتية :
الحادثة A : الكرة الأولى المسحوبة هي حمراء و الحادثة B : الكرة الثانية المسحوبة هي حمراء و الحادثة C : الكرة الثالثة المسحوبة هي بيضاء فتكون الحادثة $(A \cap B \cap C)$ هي الحادثة التي تمثل " الحصول على أول كرة بيضاء في السحبة الثالثة " .
بتطبيق مبدأ الاحتمالات المركبة فإن :

$$p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p_A(B) \cdot p_{A \cap B}(C) \text{ .}$$

لدينا $p(A) = \frac{4}{7}$. بعد سحب الكرة الأولى حمراء (A محققة) يبقى

في الصندوق 6 كرات : 3 كرات حمراء و3 كرات بيضاء ومنه :
$p_A(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. بعد السحبتين الأولى والثانية أي $(A\cap B)$ محققة يبقى في الصندوق 3 كرات بيضاء وكرتين حمراء ومنه :
$p_{A\cap B}(C)=\frac{3}{5}$ إذن: $p(A\cap B\cap C)=\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{35}$

II. 1- في السحبة الأولى سحبنا كرتين في آن واحد من الصندوق الذي يحتوي 7 كرات وتكون مجموعة الإمكانيات : $C_7^2=21$ وفي السحبة الثانية سحبنا كرتين من الكرات المتبقية في الصندوق وتكون مجموعة الإمكانيات $C_5^2=10$ إذن مجموعة الإمكانيات خلال السحبتين هو: $C_7^2\times C_5^2=21\times 10=210$. ومنه احتمال الحادثة E هو :
$p(E)=\frac{C_3^2\times C_4^2}{210}=\frac{18}{210}=\frac{3}{5}$. تتحقق الحادثة F لما نسحب في السحبة الأولى كرتين حمراوين وفي السحبة الثانية أيضا كرتين حمراوين ويبق في الصندوق 3 كرات بيضاء (نفس اللون) إذن :
$$p(F)=\frac{C_4^2\times C_2^2}{210}=\frac{1}{35}\ .$$
2- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ،3 .

■ $X=0$ لما نسحب في السحبة الأولى كرتين بيضاوين وفي السحبة الثانية كرة بيضاء وكرة حمراء أو في السحبة الأولى نسحب كرة بيضاء وكرة حمراء وفي السحبة الثانية كرتين بيضاوين ومنه :
$$p(X=0)=\frac{C_3^2\cdot C_1^1\cdot C_4^1+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_2^2}{210}=\frac{12+12}{210}=\frac{4}{35}$$

■ $X=1$ لما نسحب في السحبة الأولى كرتين بيضاوين وفي السحبة الثانية كرتين حمراوين أو نسحب في السحبة الأولى كرتين حمراوين وفي السحبة الثانية كرتين بيضاوين أو نسحب في السحبة الأولى كرة بيضاء وكرة حمراء وفي السحبة الثانية كرة بيضاء وكرة حمراء .
$$p(X=1)=\frac{2C_3^2\cdot C_4^2+C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1}{210}=\frac{18}{35}$$
■ $X=2$ لما نسحب في السحبة الأولى كرة بيضاء وكرة حمراء ونسحب في السحبة الثانية كرتين حمراوين ومنه :
$$p(X=2)=\frac{C_3^1\cdot C_4^1\cdot C_3^2}{210}=\frac{6}{35}\ .$$
■ $X=3$ لما نسحب في السحبة الأولى كرتين حمراوين ونسحب في السحبة الثانية كرتين حمراوين . $p(X=3)=\frac{C_4^2\cdot C_2^2}{210}=\frac{1}{35}$
$$E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{6}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{33}{35}$$

حل التمرين 15

1- كل نتيجة تعتبر ترتيبه لـ 4 عناصر مختارة من بين 10 عناصر ، إذن عدد النتانج الممكنة هو : $A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$.

2- العدد المكون من 4 ارقام لا يبدأ بـ 0 وشكله : $abcd$ حيث الرقم a يختار من بين 9 أرقام لانه غير معدوم ، والرقم b يختار من بين 9 أرقام لانه بعد السحبة الاولى يبقى في الكيس 9 أرقام ، والعدد c يختار من بين8 أرقام وأخيرا العدد d يختار من بين 7 أرقام ومنه عدد المكون من 4 أرقام هو : $9\times9\times8\times7=4536$ ويكون احتمال الحصول على عدد مكون من 4 أرقام هو: $\frac{4536}{5040}=0,9$.

3- أ- القيم التي يأخذها المتغير X هي : $50, 30, -20, -30$

ب- $X = -30$ (يخسر $30DA$) إذا تحصلنا على عدد مكون من ثلاثة أرقام أي : $0abc$. لدينا اختيار واحد للرقم0 و 9 اختيارات للرقم a و 8 اختيارات للرقم b و7 اختيارات للرقم c إذن عدد الأعداد المكونة من 3 أرقام هو : $1\times9\times8\times7 = 504$ ومنه :

$$p(X=-30)=\frac{504}{5040}=\frac{1}{10} .$$

$X = -20$ لما نحصل على عدد $a\times\times\times$ حيث الرقم a يختار من الأرقام 1 ،2 ، 3 ، 4 والرقم الثاني (مئات) يختار من بين9 أرقام والرقم الثالث (عشرات) يختار من بين8 أرقام ورقم الوحدات يختار من بين 7 أرقام إذن عدد الأعداد من هذا النوع هو :

$4\times9\times8\times7 = 2016$ ومنه : $p(X=-20)=\dfrac{2016}{5040}=\dfrac{4}{10}$

$X = 30$ لما نحصل على عدد من 4 أرقام من الشكل $b\times\times\times$ حيث b يختار من بين الأرقام 5 ،6 ، 7 ، 8 ويكون عدد الأعداد من هذا النوع هو $4\times9\times8\times7 = 2016$ ومنه : $p(X=30)=\dfrac{2016}{5040}=\dfrac{4}{10}$.

$X = 50$ لما نحصل على عدد من الشكل $9\times\times\times$ ويكون عدد الأعداد من هذا النوع هو : $1\times9\times8\times7 = 504$ ومنه :

$$p(X=50)=\frac{504}{5040}=\frac{1}{10} .$$

$$E(X)=-30\times\frac{1}{10}+(-20)\times\frac{4}{10}+30\times\frac{4}{10}+50\times\frac{1}{10}=6$$

حل التمرين 16

1- الجداء xy هو من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان أحد العاملين x أو y هو من مضاعفات 5 . لدينا 5 أرقام ليست من مضاعفات 5 واحتمال الحصول على واحد منهم هو $\frac{5}{6}$. يكون الجداء xy ليس من مضاعفات 5 عندما يكون الرقمين x و y ليس من مضاعفات 5 ، إذن احتمال أن يكون الجداء xy ليس من مضعفات 5 هو $\frac{25}{36}=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$.

ويكون احتمال الحصول على الجداء xy من مضاعفات 5 هو :

$\frac{11}{36}=1-\frac{25}{36}$ (احتمال حادثة عكسية) .

يمكن استعمال الجدول لمعرفة عدد الجداءات التي هي من مضاعفات5

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(3;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(4;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

نلاحظ من الجدول أنه توجد 11 ثنائية $(x;y)$ تحتوي الرقم5 أي أن

الجداء xy من مضاعفات 5 . نعلم أن لما نرمي نردين معا نحصل على 36 نتيجة (ثنائية) إذن احتمال أن يكون الجداء xy من مضاعفات 5 هو : $p=\frac{11}{36}$ واحتمال أن يكون xy ليس من مضاعفات 5 هو $q=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$

2- أ إذا كررنا n مرة مستقلة رمية النردين معا نحصل على نموذج مخطط برنولي قانونه الثنائي $B\left(n,\frac{11}{36}\right)$ ونعبر عنه بـ :

$$p(X=k)=C_n^k\left(\frac{11}{36}\right)^k\left(\frac{25}{36}\right)^{n-k}$$ مع $k\in\{0;1;...;n\}$

ويمثل k عدد مرات الحصول على الجداء xy من مضاعفات 5 .

الاحتمال p_n للحصول على الأقل مرة واحدة xy من مضاعفات 5 هو $p(X\geq1)$ وهو يساوي $p_n=p(X\geq1)=1-p(X=0)$

(الحادثة $(X=0)$ تمثل الحادثة العكسية للحادثة $(X\geq1)$

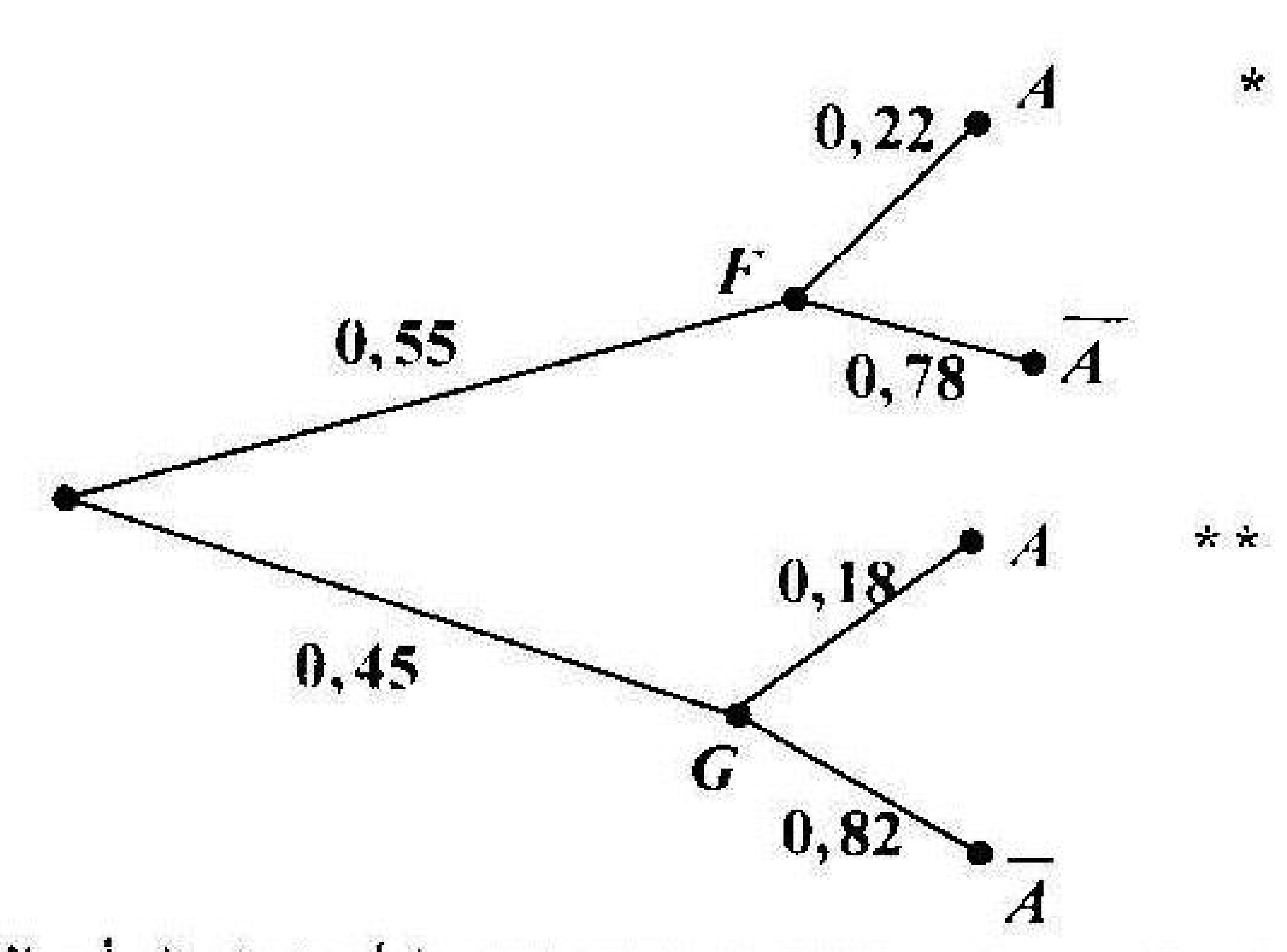
نعلم أن $p(X=0)=C_n^0\left(\frac{11}{36}\right)^0\left(\frac{25}{36}\right)^{n-0}=\left(\frac{25}{36}\right)^n$ ومنه :

$p_n=p(X\geq1)=1-\left(\frac{25}{36}\right)^n$. ب- $1-\left(\frac{25}{36}\right)^n\geq0,99$

ومنه $\left(25/36\right)^n\leq0,01$ وباستعمال اللوغارتم النبيري(ln) نجد $0,36n\geq4,6$ ومنه $n\geq12,77$ إذن $n=13$.

حل التمرين 17

نرمز بـ F : للتلميذة (أنثى) و بـ G : للتلميذ (ذكر)
وبـ A : التلميذ يدرس الألمانية .



أ- من المعطيات أو من شجرة الاحتمالات نلاحظ أن احتمال أن التلميذ المختار يدرس الألمانية علما أنه ذكر هو $p_G(A)=0,18$.

ب- احتمال أن التلميذ المختار يدرس الألمانية وهو ذكر :
$p(G\cap A)=p(G)\cdot p_G(A)=0,45\times0,18=0,081$.

جـ - نلاحظ من شجرة الاحتمالات أن لدينا مسارين * و ** تؤديان إلى الحادثة A '' التلميذ المختار يدرس الألمانية '' ومنه
$p(A)=(0,55\times0,22)+(0,45\times0,18)=0,202$.

يمكن استعمال طريقة أخرى لحساب $p(A)$ وهي دستور الاحتمالات الكلية لأن الحادثتان F و G تشكلان تجزئة لمجموعة التلاميذ

$$p(A)=p(A\cap F)+p(A\cap G)=$$

$$=p(F)\cdot p_F(A)+p(A\cap G)=$$

$$=(0,55\times0,22)+0,081=0,202$$

2) هذه التجربة هي نموذج مخطط برنولي "وسيطاه :
$n=5$ و $p=0,202$ ونعبر عنه بالقانون الثنائي كما يلي :

$$p(X=k)=C_5^k\,(0,202)^k\cdot(1-0,202)^{5-k}$$ مع

$k\in\{0,1,2,3,4,5\}$ حيث k يمثل عدد التلاميذ يدرسون الألمانية

أ- احتمال أن لأحد من التلاميذ المختارين يدرسون الألمانية هو :

$$p(X=0)=C_5^0\,(0,202)^0\,(1-0,202)^5=(0,798)^5=0,323$$

ب- احتمال أن التلاميذ الخمسة المختارين يدرسون الألمانية هو :

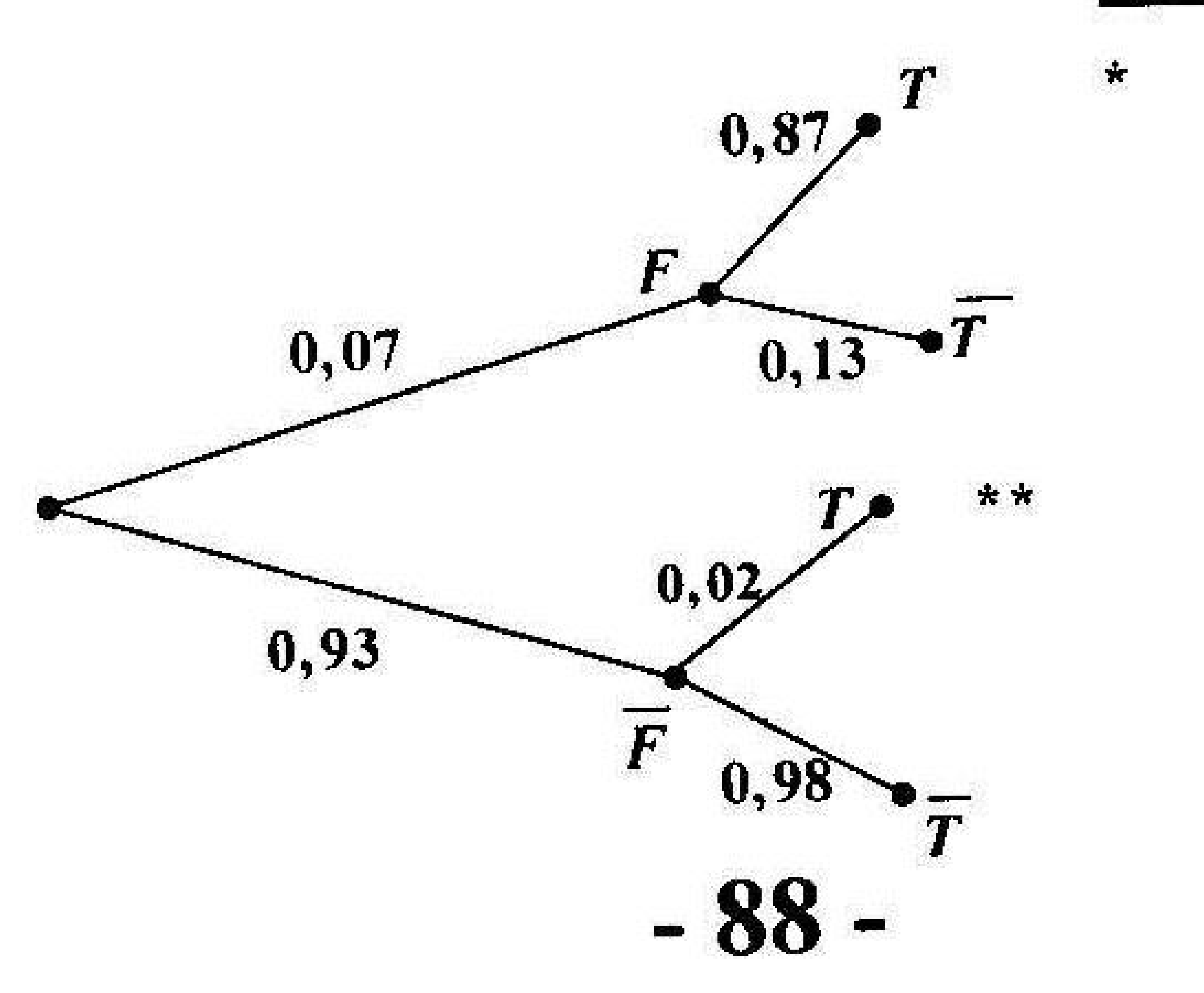
$$p(X=5)=C_5^5\,(0,202)^5\,(1-0,202)^{5-5}=(0,202)^5=0,0003$$

جـ - احتمال كي يكون 3 تلاميذ فقط من بين الخمسة المختارين يدرسون الألمانية هو :

$$p(X=3)=C_5^3\,(0,202)^3\,(1-0,202)^{5-3}=$$

$$=10(0,202)^3\,(0,798)^2=0,0525$$

حل التمرين 18



لدينا حسب المعطيات :

$$p(F)=0,07\quad,\quad p_F(T)=0,87\quad,\quad p_{\overline{F}}(\overline{T})=0,98$$

-1 $p(F\cap T)=p(F)\cdot p_F(T)=0,07\times0,87=0,0609$

$$p(\overline{F}\cap\overline{T})=p(\overline{F})\cdot p_{\overline{F}}(\overline{T})=(1-0,07)\times0,98=0,911$$

$$p(F\cap\overline{T})=p(F)\cdot p_F(\overline{T})=0,07\times(1-0,87)=0,009$$

-2 F و $\overline{F}$ تشكلان تجزئة لسكان هذا البلد ومنه بتطبيق" دستور الاحتمالات الكلية" :

$$p(T)=p(T\cap F)+p(T\cap\overline{F})=0,0609+p(\overline{F})\cdot p_{\overline{F}}(T)=$$

$$=0,0609+0,93(1-0,98)=0,0795$$

يمكن استعمال شجرة الاحتمالات للوصول إلى هذه النتيجة، الاحتمال $p(T)$ هو مجموع الاحتمالين للمسارين * و ** المؤدين إليه .

-3 احتمال كي شخص له تحليل طبي سلبي يكون مريض هو الاحتمال الشرطي : احتمال الحادثة F علما أن الحادثة $\overline{T}$ محققة أي $p_{\overline{T}}(F)$

ومنه : $$p_{\overline{T}}(F)=\frac{p(F\cap\overline{T})}{p(\overline{T})}=\frac{0,009}{1-0,079}=\frac{9}{921}$$

حل التمرين 19

-1 أ- الآلة M_1 أنتجت $\frac{2}{3}$ من الإنتاج الكلي والآلة M_2 أنتجت $\frac{1}{3}$ المتبقي ومنه : $p(A)=\frac{2}{3}$ و $p(B)=\frac{1}{3}$.

ب- بالنسبة للآلة M_1 احتمال الحصول على قطعة صالحة هو $0,9$ وبالنسبة للآلة M_2 هذا الاحتمال هو $0,95$ إذن :

$p_{M_2}(S)=0,95$, $p_{M_1}(S)=0,9$. اللآتين M_1 و M_2 تشكل تجزئة للإنتاج الكلي للورشة وحسب دستور الاحتمالات الكلية :

$$p(S)=p(S\cap M_1)+p(S\cap M_2)=$$

$$=p(M_1)\cdot p_{M_1}(S)+p(M_2)\cdot p_{M_2}(S)=$$

$$=\frac{2}{3}\times 0,9+\frac{1}{3}\times 0,95=\frac{2,75}{3}=\frac{11}{12}$$

$p(S)$ يمثل احتمال صنع قطعة صالحة من طرف هذه الورشة .

2- المتغير العشوائي الذي يساوي عدد القطع الصالحة المصنوعة من طرف الورشة في عينة تحتوي 7 قطع يتبع قانون الثنائي الذي وسطاه $n=7$ و $p=\frac{11}{12}$ ونعبر عنه بالقانون الآتي :

$$p(X=k)=C_7^k\left(\frac{11}{12}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{7-k}$$ مع $k\in\{0,1,...,7\}$

ويمثل k عدد القطع الصالحة في العينة . أ- احتمال بأن لا توجد في هذه العينة أية قطعة غير صالحة هو $p(X=7)$.

$$p(X=7)=C_7^7\left(\frac{11}{12}\right)^7\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{7-7}=\left(\frac{11}{12}\right)^7=0,54$$.

ب- احتمال بأن العينة تحتوي بالضبط 6 قطع صالحة هو $p(X=6)$

$$p(X=6)=C_7^6\left(\frac{11}{12}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{12}\right)^{7-6}=7\left(\frac{11}{12}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{12}\right)=0,34$$

جـ - العينة تحتوي على الأقل قطعتين غير صالحتين يعني يوجد في العينة 2 ، 3، ....، 7 قطع غير صالحة وتكون بالمقابل القطع الصالحة 5، 4 ، 3 ، ...،0 ونعبر عن هذه الحادثة بـ : $X\le 5$. إذن الاحتمال المطلوب هو $p(X\le 5)$ ونعلم أن الحادثة العكسية لـ $X\le 5$ هي الحادثة التي تمثل $X>5$ ومنه :

$$P(X\le 5)=1-p(X>5)=1-\left[p(X=6)+p(X=7)\right]=$$

$$=1-(0,34+0,54)=0,12$$

حل التمرين 20

I. 1 – أ- سحب كرة من كل لون يعني سحب كرة زرقاء وكرة بيضاء وكرة حمراء :

$$p(A)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{4\times 3\times 3}{120}=\frac{3}{10}$$

الكرات الثلاثة تحمل نفس الرقم يعني تكون تحمل الرقم 1 أو الرقم2 .

$p(B)=\frac{C_6^3+C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{20+4}{120}=\frac{1}{5}$. الحادثة $(A\cap B)$ تعني أن الكرات المسحوبة لها نفس اللون وتحمل نفس الرقم وهي تمثل 3 كرات بيضاء تحمل الرقم 1 . $p(A\cap B)=\frac{C_3^3}{120}=\frac{1}{120}$.

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1}{120}\div\frac{3}{10}=\frac{1}{120}\cdot\frac{10}{3}=\frac{1}{36}$$

ب- لدينا $p(A\cap B)=\frac{1}{120}$ و $p(A)\cdot p(B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$

بما أن $p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B)$ فالحادثتان A و B غير مستقلتان . جـ - لنرمز بـ E للحادثة : من بين الكرات الثلاثة المسحوبة توجد كرتان زرقاوان، فيكون احتمال الحادثة C هو الاحتمال $p_B(E)$ ومنه : $p(C)=p_B(E)=\frac{p(E\cap B)}{p(B)}$

الحادثة $(E\cap B)$ تمثل الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس الرقم منها اثنان زرقاء ، إذن تكون هذه الحادثة محققة لما نسحب كرتان زرقاوان تحملان الرقم 1 وكرة بيضاء تحمل الرقم1 أو كرتان زرقاوان تحملان الرقم 1 وكرة حمراء تحمل الرقم1 .

$$p(E\cap B)=\frac{C_2^2\cdot C_3^1+C_2^2\cdot C_1^1}{120}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

$$p(C)=\frac{p(E\cap B)}{p(B)}=\frac{1}{30}\div\frac{1}{5}=\frac{1}{30}\times\frac{5}{1}=\frac{1}{6}$$

II. 1- نحصل على ثلاثي ألالوان يعني سحب كرة من كل لون ومنه احتمال الحادثة T_1 (السحبة الأولى) هو : $p(T_1)=\frac{C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$.

بعد السحبة الأولى (ثلاثي ألالوان) يبقى في الصندوق 7 كرات : 3 بيضاء ، 2 زرقاء ، 2 حمراء . احتمال الحصول على ثلاثي ألالوان في السحبة الثانية T_2 علما أن السحبة الأولى T_1 محققة هو :

$$p_{T_1}(T_2)=\frac{C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}\ .$$

ومنه : $p(T_1\cap T_2)=p(T_1)\cdot p_{T_1}(T_2)=\frac{3}{10}\times\frac{12}{35}=\frac{18}{175}$

بعد السحبتين الأولى والثانية يبقى في الصندوق 4 كرات : 2 بيضاء ، 1 زرقاء ، 1 حمراء ومنه :

$$p_{T_1\cap T_2}(T_3)=\frac{C_2^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1}{C_4^3}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$p(T_1\cap T_2\cap T_3)=p(T_1)\cdot p_{T_1}(T_2)\cdot p_{T_1\cap T_2}(T_3)=\frac{18}{350}$$

حل التمرين 21

I. 1- بما أن السحب على التوالي وبإرجاع فيكون عدد عناصر مجموعة الإمكانيات هو n^p حيث يمثل n عدد الكرات في الكيس و p عدد الكرات المسحوبة على التوالي ، إذن عدد الإمكانيات هو $25=5^2$.

أ- احتمال الحصول على كرتين حمراوين هو : $p(A)=\frac{3^2}{25}=\frac{9}{25}$

ب- احتمال الحصول على كرتين مختلفتين اللون هو سحب كرة حمراء وكرة سوداء بهذا الترتيب أو سحب كرة سوداء وكرة حمراء بالترتيب

ومنه : $p(C)=\frac{C_3^1\times C_2^1+C_2^1\times C_3^1}{25}=\frac{3\times 2+2\times 3}{25}=\frac{12}{25}$

2- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : 0 ، 1 ، 2 .

$X=0$ ، لما نسحب كرة حمراء في السحبة الأولى وأيضا في السحبة الثانية ومنه : $p(X=0)=p(A)=\frac{9}{25}$.

$X=1$ ، لما نسحب كرتين مختلفتين في اللون : $p(X=1)=\frac{12}{25}$

$X=2$ ، لما نسحب كرة سوداء في السحبة أولى وأيضا في السحبة الثانية ومنه : $p(X=2)=\left(\frac{2}{25}\right)^2=\frac{4}{25}$.

- لما نعيد التجربة السابقة 5 مرات متتالية ومستقلة فنحصل على نموذج مخطط برنولي وسيطاه : $n=5$ و $p=\frac{9}{25}$ ونعبر عنه بـ :

$$p(X=k)=C_5^k\left(\frac{9}{25}\right)^k\left(\frac{16}{25}\right)^{5-k}$$ حيث $k\in\{0,1,...,5\}$

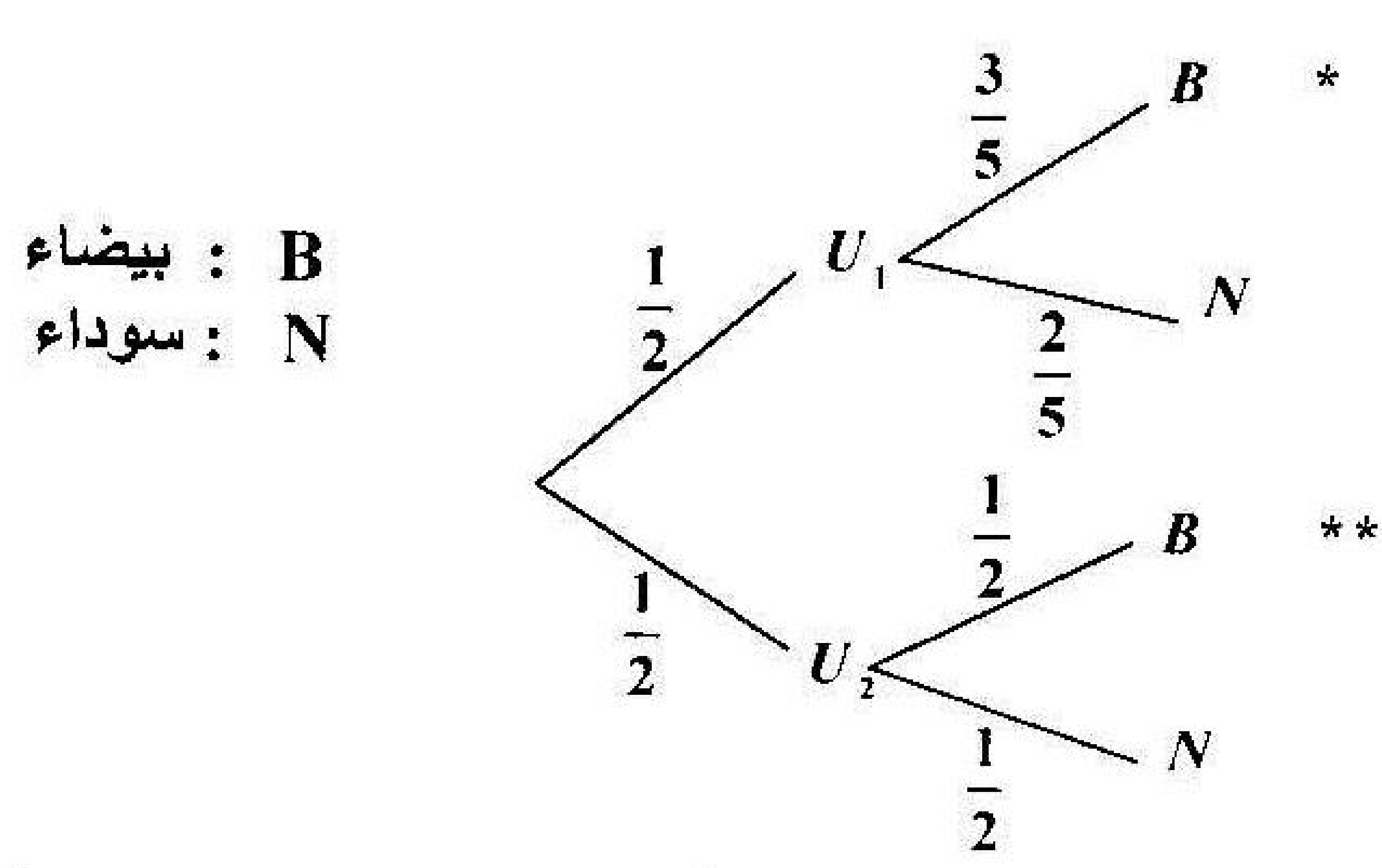
العدد k يمثل عدد مرات التي نحصل فيها على كرتين حمراوين لما نعيد التجربة 5 مرات متتالية . إذن الحصول على كرتين حمراوين 3 مرات لما نعيد التجربة 5 مرات متتالية هو :

$$p(X=3)=C_5^3\left(\frac{9}{25}\right)^3\left(\frac{16}{25}\right)^2=10\times\left(\frac{9}{25}\right)^3\left(\frac{16}{25}\right)^2$$

II. 1- للحصول على 3 كرات من نفس اللون نسحب كرتين حمراوين من الصندوق u_1 وكرة حمراء من الصندوق u_2 أو نسحب كرتين سوداوين من u_1 وكرة سوداء من u_2 ويكون الاحتمال المطلوب هو :

$$p=\frac{C_3^2\cdot C_2^1\cdot+C_2^2\cdot C_2^1}{C_5^2\cdot C_4^1}=\frac{8}{40}=\frac{1}{5}$$

2) بما أن اختيار أحد الصندوقين يتم بطريقة عشوائية فيكون : $p(u_1)=p(u_2)=1/2$.



2- أ من شجرة الاحتمالات نلاحظ أن هناك مسارين * و ** يؤديان إلى الحادثة " سحب كرة بيضاء" ومنه احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء هو : $p(B)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{20}$

ب- الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي : احتمال سحب كرة من u_1 علما أنها بيضاء أي : $p_B(u_1)$ ومنه :

$$p_B(u_1)=\frac{p(u_1)\cdot p_{u_1}(B)}{p(B)}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\right)\div\frac{11}{20}=\frac{6}{11}$$

حل التمرين22

1- احتمال ظهور الرقم 4 عند رمية النرد مرة واحدة هو $\frac{1}{6}$.

إذا اعتبرنا الحادثة S :" ظهور الرقم 4 " والحادثة E : عدم ظهور الرقم 4 فيكون لدينا مخرجين فقط : $p(S)=\frac{1}{6}$ و $p(E)=\frac{5}{6}$.

إذا رمينا النرد 4 مرات متتالية وبطريقة مستقلة فنحصل على نموذج

مخطط برنولي وقانونه الثنائي وسيطاه : $n = 4$ و $p = \frac{1}{6}$ ونعبر عنه

كما يلي $p\left(X = k\right) = C_4^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$ حيث: $k \in \{0,1,...,4\}$

العدد k يمثل عدد مرات ظهور الرقم 4 ، إذن احتمال ظهور العدد4

ثلاثة مرات هو : $p\left(X = 3\right) = C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3} = \frac{5}{324}$.

2- نعتبر الحادثة A : ظهور الرقم 4 على الأقل مرة واحدة خلال 4 رميات متتالية للنرد وتكون الحادثة العكسية $\overline{A}$: عدم ظهور الرقم 4 في الرميات الأربعة ومنه :

$$p\left(\overline{A}\right) = p\left(X = 0\right) = C_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

نعلم أن : $p\left(A\right) = 1 - p\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$.

إذن احتمال ظهور الرقم 4 على الأقل مرة واحدة هو $\frac{671}{1296}$

II. 1- في رمية واحدة للنرد لدينا مجموعة الإمكانيات : $\Omega_1 = \{S;E\}$

وعندما نرمي النرد 4 مرات متتالية تكون مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega_4 = \Omega_1^4$ وعدد عناصرها هي : $16 = 2^4$ وتكون عناصر Ω_4 هي قوائم ذات 4 عناصر : $\Omega_4 = \{(S,E,E,S),...,(S,S,E,S)\}$

- X هو المتغير العشوائي الذي يساوي عدد مرات ظهور الرقم 4 –

عند رمي النرد 4 مرات متتالية فهو يتبع قانون الثنائي $B\left(4;\frac{1}{6}\right)$

ومنه $p\left(X = k\right) = C_4^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$ ، ويكون قانون احتمال X معرف كما يلي :

$$p\left(X = 0\right) = C_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}$$

$$p\left(X = 1\right) = C_4^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{4-1} = \frac{125}{324}$$

$$p\left(X = 2\right) = C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} = \frac{25}{216}$$

$$p\left(X = 3\right) = C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{4-3} = \frac{5}{324}$$

$$p\left(X = 4\right) = C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{4-4} = \frac{1}{1296}$$

3- نعلم أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X الذي يتبع قانون الثنائي $B\left(4;\frac{1}{6}\right)$ هو العدد : $E\left(X\right) = np = 4\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ والتباين للمتغير X هو : $V\left(X\right) = np\left(1-p\right) = 4\times\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{9}$

حل التمرين23

1- عدد الكرات الذي يحتويها الصندوق هو $(x+3)$ وبما أن السحب في آن واحد فإن عدد النتائج الكلية هو عدد التوفيقات لـ 3 عناصر مختارة من بين $(x+3)$ عنصرا ، إذن عدد الإمكانيات هو :

$C_{x+3}^{2}=\frac{(x+3)(x+2)}{2}$. القيم التي يأخذها X هي: 0 ، 1 ، 2

الحادثة $(X=0)$ هي سحب كرتين سودا وتين إذن :

$$p(X=0)=\frac{C_x^2}{C_{x+3}^2}=\frac{x(x-1)}{(x+3)(x+2)}$$

$$p(X=1)=\frac{C_3^1\cdot C_x^1}{C_{x+3}^2}=\frac{6x}{(x+3)(x+2)}$$

$$p(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{x+3}^2}=\frac{6}{(x+3)(x+2)}$$

$$E(X)=0+1\cdot\frac{6x}{(x+3)(x+2)}+2\cdot\frac{6}{(x+3)(x+2)}=$$

$$=\frac{6(x+2)}{(x+3)(x+2)}=\frac{6}{(x+3)}$$

3- حسب المعطيات لدينا $x\geq 2$ و $p(X=0)=p(X=2)$

ومنه $\frac{x(x-1)}{(x+3)(x+2)}=\frac{6}{(x+3)(x+2)}$ و $x\geq 2$

ومنه $x(x-1)=6$ و منه $x=3$ و $x=-2$ (مرفوض)

4- إذا كان $x=3$ فإن احتمال سحب كرتين بيضا وتين هو :

$$p(X=2)=\frac{6}{(x+3)(x+2)}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5} .$$

لنرمز بـ S للحادثة : سحب كرتين بيضاويين في آن واحد"
وبـ E للحادثة :" كل السحبات الأخرى لكرتين في آن واحد وتختلف عن الحادثة S " ويكون لدينا مخرجين فقط : $p(S)=\frac{1}{5}$ و

$p(E)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ ونحصل على تجربة من نموذج تجربة برنولي

ليكن المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد مرات سحب كرتين بيضا وتين(في آن واحد) في خمسة سحبات متتالية وبالإرجاع ، فإن X يتبع قانون الثنائي بالوسيطين :

$n=5$ و $p=\frac{1}{5}$ ومنه $p(X=k)=C_5^k\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{5-k}$ مع

$k\in\{0,1,2,...,5\}$ حيث k يمثل عدد الثنائيات من الكرات البيضاء المسحوبة في 5 سحبات متتالية . احتمال سحب مرة واحدة كرتين بيضاوين $(k=1)$ هو : $p(X=1)=C_5^1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^4=\frac{256}{625}$

حل التمرين24

I. 1- لتكن الحادثة S :" سحب كرة تحمل الرقم1" والحادثة E : "سحب كرة تحمل رقم يختلف عن 1" وبالتالي لدين مخرجين فقط :

$p(S)=\frac{1}{4}$ و $p(E)=\frac{3}{4}$ وتكون هذه التجربة تلائم تجربة برنولي . وعندما نكرر هذه التجربة 5 مرات متتابعة ومستقلة فالمتغير العشوائي Y يتبع قانون الثنائي بالوسيطين $n=5$ و $p=1/4$ ومنه

$$p(Y=k)=C_5^k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}$$ مع $k\in\{0,1,2,...,5\}$

العدد k يمثل عدد الكرات المسحوبة والتي تحمل الرقم1 في الخمس السحبات المتتالية وبالإرجاع .

2- احتمال الحادثة A (الحصول على 4 كرات تحمل الرقم 1) في الخمس سحبات المتتالية هو :

$$p(A)=p(X=4)=C_5^4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)=5\times\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{15}{1024}$$

الحادثة $\overline{B}$ العكسية للحادثة B هي :" سحب أكثر من 4 كرات تحمل الرقم 4 " في الخمس سحبات المتتالية أي : $p(\overline{B})=p(X=5)$

$$p(\overline{B})=p(X=5)=C_5^5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5}=\frac{1}{1024}$$.

نعلم أن $p(B)=1-p(\overline{B})=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$.

II. 1- عدد الطرق لسحب كرة من u_1 هو $C_4^1=4$ وعدد الطرق لسحب كرة من u_2 هو $C_5^1=5$ ويكون عدد النتائج الكلية (الثنائيات) هو: $4\times5=20$. لنرمز لكل كرة برقمها ، الكرات الثلاثة للصندوق u_2

التي تحمل الرقم2 نرمز لها بـ : $2,2',2''$ والكرتين اللتين تحملان الرقم 3 بـ : $3,3'$ (للوضوح فقط) .

U_2 \ U_1	1	2	3	4
2	3	4	5	6
$2'$	3	4	5	6
$2''$	3	4	5	6
3	4	5	6	7
$3'$	4	5	6	7

الجدول يعطينا كل المجاميع $X=a+b$ وحسب الجدول فإن X يأخذ القيم : 3، 4 ، 5 ، 6 ، 7 .

$p(X=3)=\frac{3}{20}=0,15$ ، $p(X=4)=\frac{5}{20}=0,25$

$p(X=5)=\frac{5}{20}=0,25$ ، $p(X=6)=\frac{5}{20}=0,25$

. $p(X=7)=\frac{2}{20}=0,1$

$$E(X)=0,15\times3+0,25\times4+0,25\times5+0,25\times6+$$
$$+0,1\times7=4,9$$

$$V(X)=0,15\times3^2+0,25\times4^2+0,25\times5^2+0,25\times6^2+$$
$$+0,1\times7^2-(4,9)^2=1,49$$

الانحراف المعياري للمتغير X هو:

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1,49}=1,22$$

حل التمرين25

1- التجربة هي نموذج" مخطط برنولي" والنتيجة المحصل عليها هي نفس النتيجة كرمي قطعة نقدية 5 مرات متتابعة ومستقلة .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد مرات ظهور الوجه ، فهو يتبع قانون الثنائي بالوسطين $n=5$ و $p=\frac{1}{2}$ ومنه احتمال الحصول على 3 مرات الوجه خلال 5 رميات متتابعة هو :

$$p(X=3)=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{16}\ .$$

2- نعلم أن : $np=12$ و $V(X)=np(1-p)=2,4$ ومنه :
$12\times(1-p)=2,4$ ومنه $1-p=2,4\div 12=0,2$ ومنه
$p=1-0,2=0,8$. لدينا $np=12$ ومنه $n=12\div 0,8=15$.

3- النتيجة المحصل عليها هي نفس النتيجة كرمي نرد واحد n مرة متتالية ومستقلة ، إذن فهذه التجربة هي من نموذج برنولي .
لتكن الحادثة S :" الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي للنرد هو6"
والحادثة E :" عدم ظهور الرقم 6 على الوجه العلوي للنرد"
ومنه $p(S)=\frac{1}{6}$ و $p(E)=\frac{5}{6}$. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد مرات ظهور الرقم 6 خلال n رمية متتالية للنرد، فهو يتبع قانون الثنائي $B\left(n;\frac{1}{6}\right)$. إذن احتمال الحصول على مرة واحدة على الرقم 6 عندما نرمي n مرة متتالية النرد هو :

$$p(X=1)=C_n^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\ .$$

ب- الحصول على الرقم 6 مرتين على الأقل يعني تحقيق الحادثة $(X\geq 2)$ التي حادثتها العكسية هي : $(X<2)$ أي : $(X=1)$ أو $(X=0)$ ونعلم أن :

$$p(X\geq 2)=1-\left[p(X=1)+p(X=0)\right]=$$

$$=1-\left[\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+C_n^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n\right]=1-\frac{n\times 5^{n-1}+5^n}{6^n}$$

حل التمرين26

احتمال كتابة حرف متحرك هو $p=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}$ واحتمال كتابة حرف ساكن هو $q=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$. إذا اعتبرنا الحادثة S :" كتابة حرف متحرك والحادثة E :" كتابة حرف ساكن" فيكون لدينا مخرجين فقط ونحصل على تجربة برنولي . نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الحروف المتحركة خلال ضرب بطريقة عشوائية 6 حروف للآلة كاتبة . المتغيرX يتبع قانون الثنائي $B\left(6;\frac{3}{13}\right)$ ونعبر عنه كما يلي: $p(X=k)=C_6^k\left(\frac{3}{13}\right)^k\left(\frac{10}{13}\right)^{6-k}$ حيث $k\in\{0,1,...,6\}$
k يمثل عدد الحروف المتحركة .

أ- احتمال الحصول على 6 حروف متحركة هو :

$$p(X=6)=C_6^6\left(\frac{3}{13}\right)^6\left(\frac{10}{13}\right)^{6-6}=\left(\frac{3}{13}\right)^6$$

ب- احتمال الحصول على 6 حروف ساكنة هو :

$$p(X=0)=C_6^0\left(\frac{3}{13}\right)^0\left(\frac{10}{13}\right)^{6-0}=\left(\frac{10}{13}\right)^6$$

جـ - احتمال الحصول على 3 حروف متحركة و3 حروف ساكنة هو :

$$p(X=3)=C_6^3\left(\frac{3}{13}\right)^3\left(\frac{10}{13}\right)^{6-3}=20\left(\frac{3}{13}\right)^3\left(\frac{10}{13}\right)^3$$

حل التمرين27

1- احتمال أن يكون شخص زمرته من عامل (-Rhésus) هو :

$$0,07+0,072+0,012+0,005=0,159$$

2- احتمال بأن يكون شخص زمرته A هو :

$p=0,381+0,072=0,453$ واحتمال أن يكون شخص زمرته تختلف عن الزمرة A هو : $q=1-0,453=0,547$.

إذا اعتبرنا الحادثة S : " الشخص زمرته A "

والحادثة E : " الشخص زمرته ليست A " فيكون لدينا مخرجين فقط ونكون أمام تجربة برنولي. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الأشخاص الذين زمرتهم A من بين العشرة المتبرعين، فهو يتبع قانون الثنائي وسيطاه $n=10$ و $p=0,453$ ونعبر عنه كما يلي :

$$k\in\{0,1,...,10\}\quad p(X=k)=C_{10}^k(0,453)^k(0,547)^{10-k}$$

$$p(X=4)=C_{10}^4(0,453)^4(0,547)^6=210(0,453)^4(0,547)^6$$

3- نعلم أن احتمال أن يكون شخص زمرته O^+ هو 0,37 و أن احتمال أن تكون زمرة شخص ليست O^+ هو : $1-0,37=0,63$.

نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يساوي عدد المتبرعين الذين زمرتهم O^+ من بين العشرة المتطوعين ، فهو يتبع قانون الثنائي بالوسيطين: $n=10$ و $p=0,37$ ومنه :

$$p(Y=k)=C_{10}^k(0,37)^k(0,63)^{10-k}$$

احتمال أن يكون على الأقل 3 متبرعين زمرتهم O^+ هو $p(Y\geq 3)$

واحتمال الحادثة العكسية هو $p(Y<3)$ ومنه

$$p(Y\geq 3)=1-p(Y<3)$$

$$p(Y<3)=p(Y=0)+p(Y=1)+p(Y=2)$$

$$p(Y=0)=C_{10}^0(0,37)^0(0,63)^{10}=(0,63)^{10}$$

$$p(Y=1)=C_{10}^1(0,37)(0,63)^9=3,7(0,63)^9$$

$$p(Y=2)=C_{10}^2(0,37)^2(0,63)^8=45(0,37)^2(0,63)^8$$

$$p(Y<3)=(0,63)^8\left[(0,63)^2+3,7\times 0,63+45\times(0,37)^2\right]=$$

$$=0,024(0,396+2,331+6,16)=0,22$$

$$p(Y\geq 3)=1-p(Y<3)=1-0,22=0,78$$

حل التمرين28

1- كل تجربة تعطينا مخرجين فقط : O(يفتح الباب) و F (لا يفتح الباب) وتكون مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega_1=\{O,F\}$.

نعلم أن $p(O)=\frac{1}{10}$ و $p(F)=\frac{9}{10}$. عندما نكرر هذه التجربة 4 مرات مستقلة تكون مجموعة الإمكانيات هي : $\Omega=\Omega_1^{\,4}$ وعدد عناصرها $2^4=16$ وهي تتمثل في قوائم ذات 4 عناصر :

$\Omega=\{(O,F,F,O),(O,F,O,O),...,\}$.احتمال أن يفتح الباب في التجربة الرابعة هو احتمال الحصول على القائمة (F,F,F,O)

$$p(F,F,F,O)=p(F)\times p(F)\times p(F)\times p(O)=$$

$$=\left(\frac{9}{10}\right)^3\left(\frac{1}{10}\right)=0,0009$$ (لأن التجارب الأربعة مستقلة)

2- في الطريقة الثانية يقوم بتجربة المفتاح دون أن يعيده إلى صرة المفاتيح ويكمل التجربة بالمفاتيح المتبقية . القيم التي يأخذها المتغير العشوائي هي : $\{1,2,3,...,10\}$. لنرمز بـ : F_i " لا يفتحّ الباب في التجربة i " وبـ : O_i يفتح الباب في التجربة i ".

$(X=1)$ يفتح الباب في التجربة الأولى :

$p(X=1)=p(O_1)=\frac{1}{10}$. $(X=2)$ يفتح الباب في التجربة الثانية علما أن التجربة الأولى F_1 قد أجريت(تحققت) .

نعلم أن $p(F_1)=\frac{9}{10}$ وتبقى 9 مفاتيح لإجراء التجربة الثانية O_2

واحتمالها : $p_{F_1}(O_2)=\frac{1}{9}$

$$p(X=2)=p(F_1\cap O_2)=p(F_1)\times p_{F_1}(O_2)=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$$

$(X=3)$ يفتح الباب في التجربة الثالثة علما أن التجربتين الأولى F_1 والثانية F_2 قد أجريتا . في التجربة الثانية F_2 لديه 9 مفاتيح منها 8 غير صالحة لفتح الباب ومنه : $p_{F_1}(F_2)=\frac{8}{9}$.

في التجربة الثالثة O_3 لديه 8 مفاتيح منها واحد صالح لفتح الباب ومنه $p_{F_1\cap F_2}(O_3)=\frac{1}{8}$ ومنه :

$$p(X=3)=p(F_1\cap F_2\cap O_3)=$$

$$=p(F_1)\times p_{F_1}(F_2)\times p_{F_1\cap F_2}(O_3)=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

وأيضا من أجل كل k حيث : $k\in\{1,2,3,...,10\}$ فإن :

$p(X=k)=\frac{1}{10}$. الأمل الرياضي للمتغير X هو العدد :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{10}k\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}\times(1+2+...+10)=\frac{1}{10}\times 55=\frac{11}{2}$$

التباين هو العدد المعرف بـ :

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}k^2-\left(\frac{11}{2}\right)^2=$$

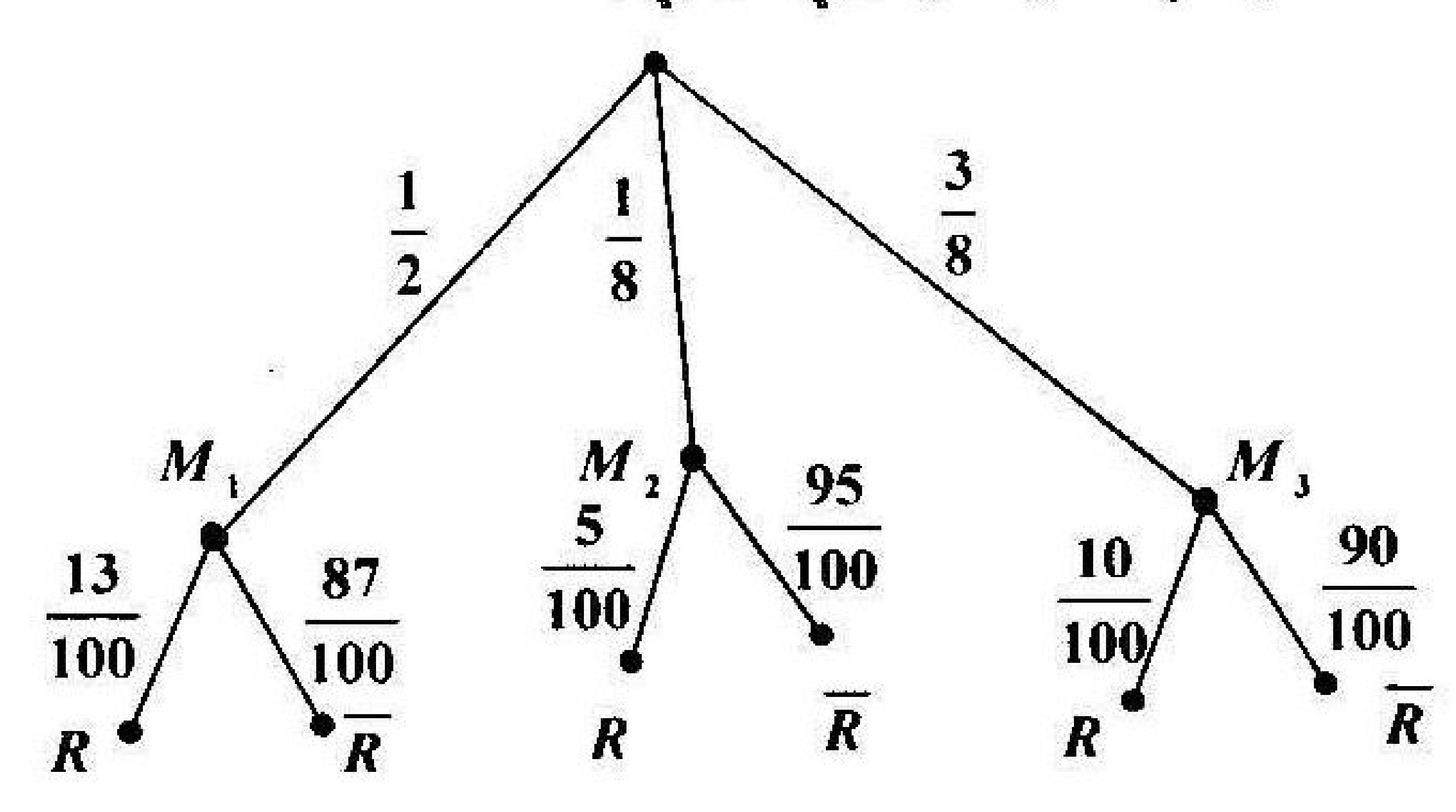
$$=\frac{1}{10}(1+2^2+3^2+...+10^2)-\left(\frac{11}{2}\right)^2=\frac{77}{2}-\frac{121}{4}=\frac{33}{4}$$

ملاحظة : في الحالة الأولى (تجربة المفتاح وإعادته إلى صرة المفاتيح) لو طرحنا السؤال كما يلي : احسب الاحتمال بأن يفتح الباب مرة واحدة في 4 تجارب دون تحديد رتبة الفتح لكان بإمكاننا اعتبار المتغير العشوائي X يساوي عدد مرات يفتح فيها الباب خلال 4 تجارب فهو يتبع قانون الثنائي بالوسيطين $n=4$ و $p=\frac{1}{10}$

ويكون الاحتمال المطلوب $p(X=1)=C_4^1\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{9}{10}\right)^3$

حل التمرين29

نرمز بـ : R للحادثة : "اللون الآلة المختارة أحمر". الشجرة المناسبة لهذه الوضعية هي كالآتي :



1- احتمال بأن تكون الآلة المختارة من النوع M_3 هو :

$p(M_3)=\frac{3}{8}$. لدينا : $p(M_2)=\frac{1}{8}$ و $p(M_1)=\frac{1}{2}$.

2- احتمال أن تكون الآلة المختارة حمراء علما أنها من النوع M_2

هو الاحتمال الشرطي: $p_{M_2}(R)$ ومن المعطيات أو شجرة الاحتمالات

نلاحظ أن : $p_{M_2}(R)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$.

3- الحادثة $\overline{R}$ تمثل" لون الآلة المختارة ليس أحمر" ومن شجرة الاحتمالات نلاحظ أن المسارات المؤدية إلى الحادثة $\overline{R}$ هي ثلاثة ومنه

$$p(\overline{R})=\left(\frac{1}{2}\times\frac{87}{100}\right)+\left(\frac{1}{8}\times\frac{95}{100}\right)+\left(\frac{3}{8}\times\frac{90}{100}\right)=\frac{713}{800}$$

يمكن أيضا استعمال دستور الاحتمالات الكلية لإجابة على هذا السؤال لأن M_1,M_2,M_3 تشكل تجزئة للمخزن ومنه :

$$p(\overline{R})=p(M_1\cap\overline{R})+p(M_2\cap\overline{R})+p(M_3\cap\overline{R})=$$

$$p(M_1)\cdot p_{M_1}(\overline{R})+p(M_2)\cdot p_{M_2}(\overline{R})+p(M_3)\cdot p_{M_3}(\overline{R})=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{87}{100}\right)+\left(\frac{1}{8}\times\frac{95}{100}\right)+\left(\frac{3}{8}\times\frac{90}{100}\right)=\frac{713}{800}$$

4- الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطي $p_R(M_1)$ ومنه :

$$p_R(M_1)=\frac{p(M_1\cap R)}{p(R)}=\frac{p(M_1)\cdot p_{M_1}(R)}{p(R)}=\frac{1/2\times 13/100}{87/100}$$

حل التمرين30

1- لتكن الحادثة A : الرامي يصيب المنطقة2 والحادثة B: الرامي يصيب المنطقة1 والحادثة C : الرامي لا يصيب إطلاقا الهدف .

الحادثة C هي الحادثة العكسية للحادثة $(A\cup B)$ ومنه :

$p(C)=1-p(A\cup B)$. بما إن $A\cap B=\varnothing$ فإن :

ومنه $p(A\cup B)=p(A)+p(B)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

$p(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. 2- حسب المعطيات فالرامي يسجل نقطتين إذا أصاب المنطقة<u>2</u> ويسجل نقطة واحدة إذا أصاب المنطقة <u>1</u> و0 نقطة إذا لم يصيب الهدف إطلاقا . الجدول ألآتي يعطينا كل الحالات

الحادثة	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
عدد نقاط الرمية1	2	2	2	1	1	1	0	0	0
عدد نقاط الرمية 2	2	1	0	2	1	0	2	1	0
قيم X	4	3	2	3	2	1	2	1	0

الحادثة A_1 تمثل : الرامي أصاب المنطقة <u>2</u> في الرمية 1 و الرمية 2

الحادثة A_2 تمثل : الرامي أصاب المنطقة <u>2</u> في الرمية 1 وأصاب المنطقة <u>1</u> في الرمية 2 . الحادثة A_9 تمثل الرامي لم يصيب الهدف في الرميتين 1 و 2 .

القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 ،4 .

ويكون قانون احتمال المتغير العشوائي X معرف كما يلي :

$$p(X=0)=p(A_9)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{9}{36}$$

$$p(X=1)=p(A_6)+p(A_8)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{12}{36}$$

$$p(X=2)=p(A_3)+p(A_5)+p(A_7)=2\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{36}$$

$$p(X=3)=p(A_2)+p(A_4)=2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{36}$$

$$.\,p(X=4)=p(A_1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

الأمل الرياضي لـ X هو العدد $E(X)$

$$E(X)=4\times p(X=4)+3\times p(X=3)+2\times p(X=2)+$$
$$+1\times p(X=1)+0\times p(X=0)=$$
$$=4\left(\frac{1}{36}\right)+3\left(\frac{4}{36}\right)+2\left(\frac{10}{36}\right)+\left(\frac{12}{36}\right)+0\times\left(\frac{9}{36}\right)=\frac{4}{3}$$

التباين هو العدد $V(X)$ المعرف كما يلي :

$$V(X)=x_i^{\,2}p_i-\left[E(X)\right]^2=16p(X=4)+9p(X=3)+$$
$$+4p(X=2)+p(X=1)+0\times p(X=0)-\frac{16}{9}=\frac{10}{9}$$

الانحراف المعياري للمتغير X :

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{10}{9}}=\frac{\sqrt{10}}{3}$$

تمارين مقترحة للحل

تمرين 1

كيس يحتوي 6 قريصات تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 .
نسحب على التوالي 6 قريصات ونرتبها من اليسار إلى اليمين ابتداء من القريصة الأولى المسحوبة وبالتالي نحصل على عدد مكون من 6 أرقام مختلفة . احسب احتمال الحوادث الآتية :

الحادثة A : العدد المكون ينتهي برقم زوجي .
الحادثة B : العدد المكون يبدأ برقم فردي .
الحادثة C : العدد المكون يبدأبرقم5 و ينتهي برقم زوجي .
الحادثة D : العدد المكون يبدأ بالرقم 3 و ينتهي بالرقم 4 .

تمرين 2

قسم مكون من 12 تلميذ و 8 تلميذات . يريد تلاميذ هذا القسم أن يكونوا لجنة تحتوي 3 أعضاء (نفرض أن جميع التلاميذ لهم نفس الحظ بأن يكونوا في اللجنة) . 1- احسب احتمال الحوادث الآتية :

الحادثة A : الأعضاء الثلاثة من نفس الجنس .
الحادثة B : اللجنة تحتوي على الأقل عضوين ذكور .
الحادثة C : التلميذ أحمد موجود في اللجنة .
الحادثة D : التلميذ أحمد والتلميذة أمينة يكونان معا في نفس اللجنة .

2- نفرض أن الحادثةA محققة ، مااحتمال أن تكون التلميذة أمينة موجودة في الجنة .

تمرين 3

برنامج امتحان شفوي يتألف من 50 سؤالا .
كل متر شح يسحب في آن واحد 3 أسئلة ويجب عليه الإجابة على

سؤالين على الأقل لكي ينجح وإن أجاب على سؤال واحد فقط فله الحق بأن يعيد الامتحان مرة ثانية . أحد المترشحين درس وحضر 20 سؤالا فقط .
احسب احتمال الحوادث الآتية :
1- المترشح لاينجح ولا يسمح له بإعادة الامتحان .
2- المترشح سيكون له الحق بأن يعيد الامتحان .
3- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الأسئلة التي سحبها المترشح واستطاع الإجابة عليها . حدد قانون المتغير العشوائي X .

تمرين 4

صندوق يحتوي 4 كرات بيضاء و3 كرات خضراء وكرتين صفراوين .

I. التجربة الأولى : نسحب على التوالي 3 كرات وبدون إعادة الكرة .
احسب احتمال الحصول على : أ- 3 كرات بيضاء .
ب- كرتين خضراوين وكرة صفراء بهذا الترتيب .
جـ - ثلاثة كرات من نفس اللون .

II. التجربة الثانية : نسحب في آن واحد 3 كرات من الصندوق .
1- احسب الاحتمال للحصول على كرة صفراء على الأكثر .
2- احسب الاحتمال للحصول على ثلاثي الألوان.
3- ليكنX المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة . أ- حدد قانون المتغير العشوائي X .
ب- احسب الأمل الرياضي $E(X)$.

تمرين 5

صندوق يحتوي 5 قريصات ذات أشكال مثلثة وثلاثة قريصات مستطيلة الشكل وقريصة واحدة مستديرة الشكل. نسحب في آن واحد ثلاثة قريصات . 1- احسب احتمال كل حادثة من الحوادث الآتية :

الحادثة A : القريصات الثلاثة المسحوبة من أشكال مختلفة .

الحادثة B : إثنان فقط من القريصات المسحوبة لها نفس الشكل .

الحادثة C : توجد على الأقل قريصة شكلها مثلث من بين القريصات المسحوبة . 2- نعتبر أن سحب قريصة شكلها مثلث يعطي ربح 0 نقطة وسحب قريصة مستطيلة يعطي ربح 2 نقطة وسحب قريصة مستديرة يعطي ربح 3 نقط . ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع الأرباح التي تعطيها القريصات الثلاثة المسحوبة .

حدد قانون المتغير العشوائي X واحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

تمرين 6

I. جمعية تتكون من 60% من الرجال و 40% من النساء .

نفرض أن 50% من الرجال و 70% من النساء سنهم اكبر من 50 سنة اختير وعن طريقة القرعة شخص من هذه الجمعية .

ما احتمال أن يكون هذا الشخص :

أ- رجلا . ب- امرأة . جـ - امرأة سنها أكبر من 50سنة

II. نفرض أن الجمعية تحتوي 50 شخصا موزعين حسب النسب المئوية المذكورة سابقا . تريد هذه الجمعية تكوين مكتب يحتوي 3 أعضاء دائمين . احسب احتمال الحوادث الآتية :

الحادثة A : الأعضاء الثلاثة كلهم رجال .

الحادثة B : الأعضاء هم رجلان وامرأة سنها أكبر من 50سنة .

الحادثة C : الأعضاء الثلاثة سنهم أكبر من 50 سنة .

تمرين 7

رقمت أوجه نرد مزيف من 1 إلى 6 . نفرض أن احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم الزوجي هو $\frac{2}{5}$ احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم

الفردي . 1- احسب احتمال ظهور كل وجه .

2- نرمي النرد مرتين على التوالي وليكن S مجموع رقمي الرميتين .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي 1 اذا كان $S = 2$ أو $S = 3$ ويساوي 2 إذا كان S عدد أولي وأكبر من 7 ويساوي 3 إذا كان $S = 10$. حدد قانون المتغير العشوائي X واحسب الأمل الرياضي .

تمرين 8

في ثانوية معينة 35% من التلاميذ يمارسون رياضة كرة القدم و 20% يمارسون رياضة كرة اليد و 15% يمارسون رياضة كرة القدم وكرة اليد . نختار عشوائيا تلميذا من هذه الثانوية .

احسب احتمال الحوادث الآتية :

1- الحادثة A : اختيار تلميذ يمارس رياضة كرة القدم أو كرة اليد .

2- الحادثة B : اختيار تلميذ لا يمارس رياضة كرة القدم ولا كرة اليد .

3- الحادثة C : اختيار تلميذ يمارس رياضة كرة القدم علما أنه يمارس رياضة كرة اليد .

تمرين 9

صندوقين A وB يحتوي كل واحد منهما 10 كرات مرقمة من 0 إلى 9 .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق A وكرة من الصندوق B وبالتالي نشكل عدد من رقمين حيث رقم الوحدات هو الرقم الذي تحمله الكرة المسحوبة من الصندوق B (نقصد بعدد مكون من رقمين العدد الذي رقم عشراته لا يساوي 0) . احسب احتمال الحوادث الآتية :

الحادثة A : العدد المشكل يقبل القسمة على 5 .

الحادثة B : العدد المشكل هو عدد فردي .

الحادثة C : العدد المحصل هو عدد أكبرمن60 .

الحادثة D : رقم عشرات العدد المحصل عليه هو عدد زوجي .

تمرين 10

نردان وجوههما مرقمة من 1 إلى 6 . نرمي هذين النردين في الهواء .
احسب احتمال الحوادث الآتية :
الحادثة A : يظهر على وجه أحد النردين العدد4 .
الحادثة B : مجموع رقمي النردين هو عدد أولي .
الحادثة C : يظهر على وجهي النردين نفس الرقم .

تمرين 11

صندوق يحتوي x كرة بيضاء حيث $x \geq 2$ و5 كرات حمراء .
نسحب عشوائيا في آن واحد 3 كرات من الصندوق .
1- أ- احسب الاحتمال $p(x)$ لسحب 3 كرات حمراء .

ب- عين العدد الطبيعي x لكي $p(x) = \frac{5}{28}$.

2- احسب الاحتمال $p'(x)$ لسحب كرة على الأكثر بيضاء .

3- نفرض أن $x = 5$. احسب احتمال الحوادث الآتية :
الحادثة A : الكرات الثلاثة المسحوبة لها نفس اللون .
الحادثة B : من بين الكرات المسحوبة توجد على الأقل كرتان حمراوان
الحادثة C : سحب 3 كرات بيضاء علما أن الحادثة A محققة .

تمرين 12

سباق يشارك فيه 15 متسابقا . نسحب على التوالي أسماء 3 متسابقين
احسب الاحتمال كي هذه الأسماء تحتل المراتب الثلاث الأولى في السباق (ملاحظة : نفرض أنه لا يوجد رتب متساوية) .

تمرين 13

كيس يحتوي قريصتين تحملان الرقم 1 وثلاث قريصات تحمل الرقم2 وقريصتين تحملان الرقم 3 . نسحب على التوالي قريصتين حيث نعيد في كل مرة القريصة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي .
نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي مجوع رقمي القريصتين المسحوبتين . 1- حدد قانون المتغير العشوائي X .
2- نسحب هذه المرة قريصتين في آن واحد . احسب احتمال الحوادث الآتية : أ- الحادثة A : القريصتان تحملان نفس الرقم .
ب- الحادثة B : الفرق بين رقمي القريصتين هو عدد فردي .
الحادثة C : مجموع رقمي القريصتين هو 5 .

تمرين 14

نعلم أن الفصائل الدموية للإنسان هي أربعة : O ، A ، B ، AB .
مجموعة مكونة من 12 شخصا موزعين حسب فصيلتهم الدموية كما يلي : 5 أشخاص من الفصيلة O و3 أشخاص من الفصيلة A وشخصين من الفصيلة B وشخصين من الفصيلة AB .
نختار عشوائيا 3 أشخاص من هذه المجموعة .
احسب احتمال الحوادث الآتية : أ- الحادثة A : الأشخاص الثلاثة لهم نفس الفصيلة . ب- الحادثة B : من بين الأشخاص الثلاثة شخصان فقط لهما نفس الفصيلة . جـ - الحادثة C : شخصان على الأكثر لهما الفصيلة AB .

تمرين 15

قسم يحتوي 12 تلميذ ذكور و8 تلميذات . يريد تلاميذ هذا القسم أن يشكلوا لجنة من 4 أعضاء (جميع التلاميذ لهم نفس الحظ بأن يكونوا في اللجنة) . 1- احسب احتمال الحوادث الآتية :
الحادثة A : أعضاء اللجنة من نفس الجنس .

الحادثة B : أعضاء اللجنة من الجنسين معا .
الحادثة C : اللجنة تحتوي تلميذتين علما أن الحادثة B محققة .
2- نفرض أن في هذا القسم يوجد التلميذ x وأخته y . ما هو الاحتمال بأن لا يكون التلميذ x في نفس اللجنة مع أخته y .

تمرين 16

نرد مرقم كما يلي : كل وجهين يحملان رقما من الأرقام الآتية : 1 ، 2 ، 3 . نرمي هذا النرد في الهواء وليكن p_i احتمال الحصول على الوجه الذي يحمل الرقم i حيث : $i \in \{1,2,3\}$. نفرض أن النرد مغشوش وأن p_1 , p_2 , p_3 هي متناسبة على الترتيب مع 2 ، 3 ، 5 .
1- أحسب p_1 , p_2 , p_3 .
2- نرمي هذا النرد مرتين على التوالي وليكن a الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي للنرد في الرمية الأولى و b الرقم الذي يظهر في الرمية الثانية . نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي $|a-b|$.
أعط قانون المتغير العشوائي X واحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

تمرين 17

صندوق يحتوي 7 قريصات مرقمة : 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 .
1- نسحب في آن واحد 3 قريصات من الصندوق .
احسب احتمال الحوادث الآتية : أ- الحادثة A : القريصات الثلاثة تحمل أرقاما فرديا . ب- الحادثة B : من بين القريصات الثلاثة توجد فقط تحمل رقما زوجيا .
2- نسحب هذه المرة 4 قريصات بالكيفية التالية : نسحب كرتين في آن واحد ولا نعيدها إلى الصندوق ثم نسحب كرتين أخريين .

احسب الاحتمالات الآتية : 1- الكرتان الأوليان تحملان نفس الرقم .
2- مجموع الكرتين الأوليين هو 5 .

تمرين 18

I. لدينا صندوقانA و B . الصندوق A يحتوي 4 كرات مرقمة 3 ، 2 ، 2 ، 1 والصندوق B يحتوي 5 كرات مرقمة 1 ،1 ، 2 ، 2 ، 3 .
نسحب عشوائيا كرة من الصندوق A وكرتين من الصندوق B ، نحصل على 3 أرقام التي نضعها جنبا إلى جنب من اليسار إلى اليمين وبالتالي نشكل عدد مكون من3 أرقام (رقم الكرة المسحوبة من الصندوق A هو رقم مئات العدد) . احسب احتمال الحوادث الآتية :
الحادثة A : العدد المحصل عليه مكون من 3 أرقام فردية .
الحادثة B : العدد المحصل عليه هو عدد زوجي .
الحادثة C : العدد المكون أكبر من 200 .
II. نسحب هذه المرة 3 كرات بالكيفية التالية : كرة من الصندوق A وكرتين على التوالي وبدون إعادة الكرتين من الصندوق B .
ليكن المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة من الصندوق B والتي تحمل الرقم 1 . حدد قانون المتغير العشوائي X .

تمرين 19

بمناسبة نجاحه في البكالوريا وجه أحمد دعوى إلى 20 صديقا له للحضور إلى حفلة عشاء التي تقام لهذه المناسبة ، ويعلم أن الأشخاص x, y, z متخاصمون . لتناول العشاء قام أحمد بجمع أصدقائه في أفواج تشمل 4 أشخاص . 1- أحسب احتمال الحوادث الآتية :
أ- الحادثة A : الأشخاص الثلاثة x, y, z لا تكون معا في نفس الفوج
ب- الحادثة B : الشخص x غير موجود في الفوج .

2- بعد المشاورة استطاع أحمد أن يصلح بين الشخصين x و y وأقنعهما بأن يكونا معا في نفس الفوج .
أ- احسب احتمال الحصول على فوج يحتوي x و y ولا يوجد فيه z .
ب- نفرض أننا حصلنا على فوج يحتوي x و y ، ما احتمال أن يكون الشخص z موجودا في الفوج ؟

تمرين 20

لدينا نرد مغشوش وأوجهه مرقمة كما يلي : 1 ،1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 .
نرمي هذا النرد في الهواء وبعد سقوطه على ألأرض نسجل الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي . إذا كان احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم الفردي هو ضعف احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم الزوجي
احسب : أ- احتمال ظهور الوجه الذي رقمه زوجي .
ب- احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم 1 .
2- نرمي هذا النرد 3 مرات متتالية ، احسب الاحتمال كي نحصل على نفس الرقم خلال الرميات الثلاث .

تمرين 21

تشترك في سباق الدرجات ثلاث دول : الجزائر ، تونس ، المغرب حيث الجزائر ممثلة بـ 4 عناصر وتونس ممثلة بـ 3 عناصر والمغرب بـ عنصرين . احسب الاحتمالات الآتية :
ا- المرتبة الأولى والثانية للجزائر والثالثة لتونس .
ب- المرتبة الأولى للجزائر والمرتبة الثانية للمغرب والثالثة لتونس .
ج- المراتب الثلاث الأولى تحتلها عناصر من الجنسيات الثلاث .

تمرين 22

كيس يحتوي 4 كرات بيضاء و5 كرات حمراء .

I. نسحب على التوالي 4 كرات حيث نعيد في كل مرة الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي . احسب احتمال الحوادث الآتية :
أ- الحصول على 4 كرات حمراء . ب- الكرتين الأوليين بيضاوين والأخريين حمراوين . جـ- الكرات الأربع المسحوبة من نفس اللون
II. نسحب هذه المرة 4 كرات في آن واحد من الكيس .
1- احسب احتمال الحوادث الآتية :
أ- الحادثة A : من بين الكرات المسحوبة توجد كرة بيضاء على الأكثر . الحادثة B : الكرات المسحوبة ليست من نفس اللون .
2- نفرض أننا سحبنا 4 كرات وحصلنا على لونين مختلفين ما احتمال كي تكون ثلاث منها بيضاء .

تمرين 23

يتسبب الحريق من الدرجة الثالثة في الموت بنسبة 40% من الحالات .
نفرض أن5 أشخاص أصيبوا بهذا النوع من الحريق .
احسب احتمال الحادثتين الآتيتين :
الحادثة A : أن لا ينجو أحد منهم .
ب- الحادثة B : أن ينجو على الأقل 3 منهم .

تمرين 24

احتمال ولادة ذكر هو 0,513 و ولادة بنت هو 0,487 .
احسب الاحتمال كي عائلة من 5 أطفال تكون : أ- مكونة من 5 ذكور.
ب- مكونة من 5 إناث . ج – مكونة من 3 ذ كور وبنتين .

تمرين 25

يحتوي كيس على3 كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 وثلاث كرات سوداء مرقمة من 1 إلى 3 وكرة حمراء تحمل الرقم 1 .
1- نسحب في آن واحد كرتين من الكيس

أ- احسب الاحتمال p_1 لسحب كرتين بيضاوين .

ب- احسب الاحتمال p_2 لسحب كرتين من نفس اللون .

2- في هذا السؤال نسحب عشوائيا كرتين على التوالي وبدون إرجاع. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بمجموع الأرقام للكرتين المسحوبتين . أ- حدد قيم X ثم أعط قانون المتغيرX .

ب- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و التباين $V(X)$.

3- في هذه المرة نسحب من الكيس كرتين على التوالي ونسجل لونهما ثم نرجعهما إلى الكيس . نكرر هذه التجربة أربع مرات في نفس الظروف . احسب الاحتمال كي نحصل على كرتين بيضاوين 3 مرات .

تمرين 26

3 صناديق u_1, u_2, u_3 حيث u_1 يحتوي 6 كرات بيضاء و u_2 يحتوي 3كرات بيضاء و3 كرات سوداء و u_3 يحتوي كرتين بيضاوين و4 كرات سوداء . نعتبر نرد وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 .
نرمي هذا النرد في الهواء وحسب الرقم المسجل على الوجه العلوي للنرد نختار الصندوق الذي يتم منه سحب عشوائيا كرة .
إذا كان الرقم المسجل على النرد هو1 فنختار الصندوق1 وإذا كان الرقم المسجل على النرد هو2 فنختار الصندوق 2 وإذا كان الرقم المسجل على النرد هو3 نختار الصندوق 3 . احسب احتمال سحب كرة بيضاء .

تمرين 27

صندوق يحتوي 4 كرات بيضاء و8 كرات حمراء . نسحب على التوالي كرتين من الصندوق وبدون إعادة الكرة المسحوبة على الصندوق .
نعتبر الحادثة B_i : الكرة المسحوبة في السحبة i هي بيضاء .

هل الحادثتان B_1 و B_2 مستقلتان ؟

تمرين 28

قسم يحتوي 20تلميذا . نريد تكوين أفواج مختلفة مكونة من 4 تلاميذ .
1- ما هو عدد هذه الأفواج ؟ . نرمز لعدد الأفواج بـ N .
نسحب عشوائيا فوج من بين N فوج . 2- احسب الاحتمال كي التلميذ أحمد يكون في هذا الفوج . 3- كل تلاميذ هذا القسم يشاركون في امتحان آخر سنة . نقبل أن احتمال النجاح لكل تلميذ هو 0,5 .

نختار الفوج المكون من 4 تلاميذ والموجود فيه التلميذ أحمد ، هذا الفوج يعتبر فوج معلوم تماما ونرمز له بـ G_1 .

احسب احتمال الحوادث الآتية : أ- ينجح تلميذ واحد من الفوج G_1.

ب- ينجح التلميذ أحمد فقط في الفوج G_1.

ج- ينجح كل تلاميذ الفوج G_1 .

تمرين 29

قسم يحتوي 42 تلميذا . في كل أسبوع أستاذ مادة الرياضيات يعطي وظيفة منزلية ويصحح في كل مرة 28 ورقة فقط والتي يختارها بطريقة عشوائية من بين وظائف تلاميذ القسم .
(نفرض أن كل تلاميذ القسم أعادوا وظيفتهم إلى الأستاذ) .
1- ما هو الاحتمال كي يجد تلميذ اختير بطريقة عشوائية ورقته مصححة في أسبوع معين .
2- ما هو الاحتمال كي يجد تلميذ من بين 3 تلاميذ الذين اختيروا بطريقة عشوائية ورقته مصححة في أسبوع معين .
3- ما هو الاحتمال كي يجد تلميذ اختير بطريقة عشوائية ورقته مصححة 3 مرات فقط في 7 أسابيع متتالية .

تمرين 30

يقدم التلفزيون لعبة "ألعب وأربح" وهي تتمثل في طرح 4 أسئلة على المتر شح وإعطاء لكل سؤال 3 أجوبة منها جواب واحد فقط هو الجواب الصحيح . 1- احسب الاحتمال كي المتر شح يعطي :
0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 أجوبة صحيحة .
2- ما هو الاحتمال كي أول جواب صحيح يكون في السؤال الثالث .
3- نشترط في هذه المرة أن كل إجابة غير صحيحة تقصي نهائيا المتر شح . احسب الاحتمال كي المترشح يعطي :
أ- إجابتين صحيحتين . ب- على الأقل إجابتين صحيحتين .

تمرين 31

لدينا صندوقان : الصندوق u_1 يحتوي 6 كرات مرقمة من 1 إلى6 والصندوق u_2 يحتوي 5 كرات مرقمة من 7 إلى 11 .
1- نسحب في آن واحد كرتين من الكيس u_1 وكرتين من الكيس u_2 ، نحصل هكذا على 4 كرات . احسب احتمال الحوادث الآتية :
الحادثة A : من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد بالضبط كرتان تحملان رقما زوجيا .
الحادثة B : من بين الكرات الأربع المسحوبة توجد كرتان على الأكثر تحملان رقما فرديا .
2- نعتبر فقط الصندوق u_1 ونسحب منه كرتان على التوالي ، نسجل رقميهما ونعيدهما إلى الصندوق . نكرر هذه التجربة 5 مرات متتالية .
احسب احتمال الحصول على3 مرات على كرتين مجموع رقميهما عدد فردي.

تمرين 32

يحتوي صندوق u_1 على 6 كرات مرقمة من 1 إلى 6 و يحتوي صندوق ثاني u_2 على 4 كرات مرقمة من 1 إلى 4 .
1- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق u_1 وكرة من الصندوق u_2 .
ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي القيمة المطلقة للفرق للعددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين . أ- أعط قانون المتغير X .
ب- ما احتمال أن يكونا الرقمين متساوين . ج- أحسب الأمل الرياضي .
2- في هذه المرة نسحب عشوائيا كرة من الصندوق u_1 نسجل رقمها ثم نضعها في الصندوق u_2 ، ثم نسحب كرة من الصندوق u_2 (يحتوي عندئذ 5 كرات) ونسجل رقمها . احسب الاحتمال كي الرقمين يكونان متساوين .

تمرين 33

نرد أوجهه مرقمة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 . نرمي هذا النرد 3 مرات متتالية ونسجل في كل رمية الرقم المسجل على الوجه العلوي للنرد.
1- احسب احتمال الحصول على الثلاثية $(4,2,1)$.
2- نكرر التجربة السابقة 5 مرات متتابعة .
أ – ما احتمال الحصول على 3 مرات النتيجة $(4,2,1)$.
ب- احسب احتمال الحصول على الأقل مرة واحدة النتيجة $(4,2,1)$.

تمرين 34

سينما (قاعة لعرض أفلام) برمجت هذه السنة 365 عرض فيلم مختلف منها 73 فيلم ثقافي . في يوم ما ذهب شخص للسينما لمشاهدة عرض فيلم . احسب الاحتمال بأن يشاهد هذا الشخص :

أ- فيلما ثقافيا .   ب- فيلما أخر (ليس ثقافيا) .

2- يذهب أحمد إلى هذه السينما مرة في الشهر بدون ما يعرف مسبقا الأفلام المبرمجة . احسب الاحتمال كي يشاهد أحمد خلال هذا العام :

أ- فيلما ثقافيا .   ب- 12فيلما ليس ثقافيا .

جـ- على الأقل فيلمان ثقافيان .

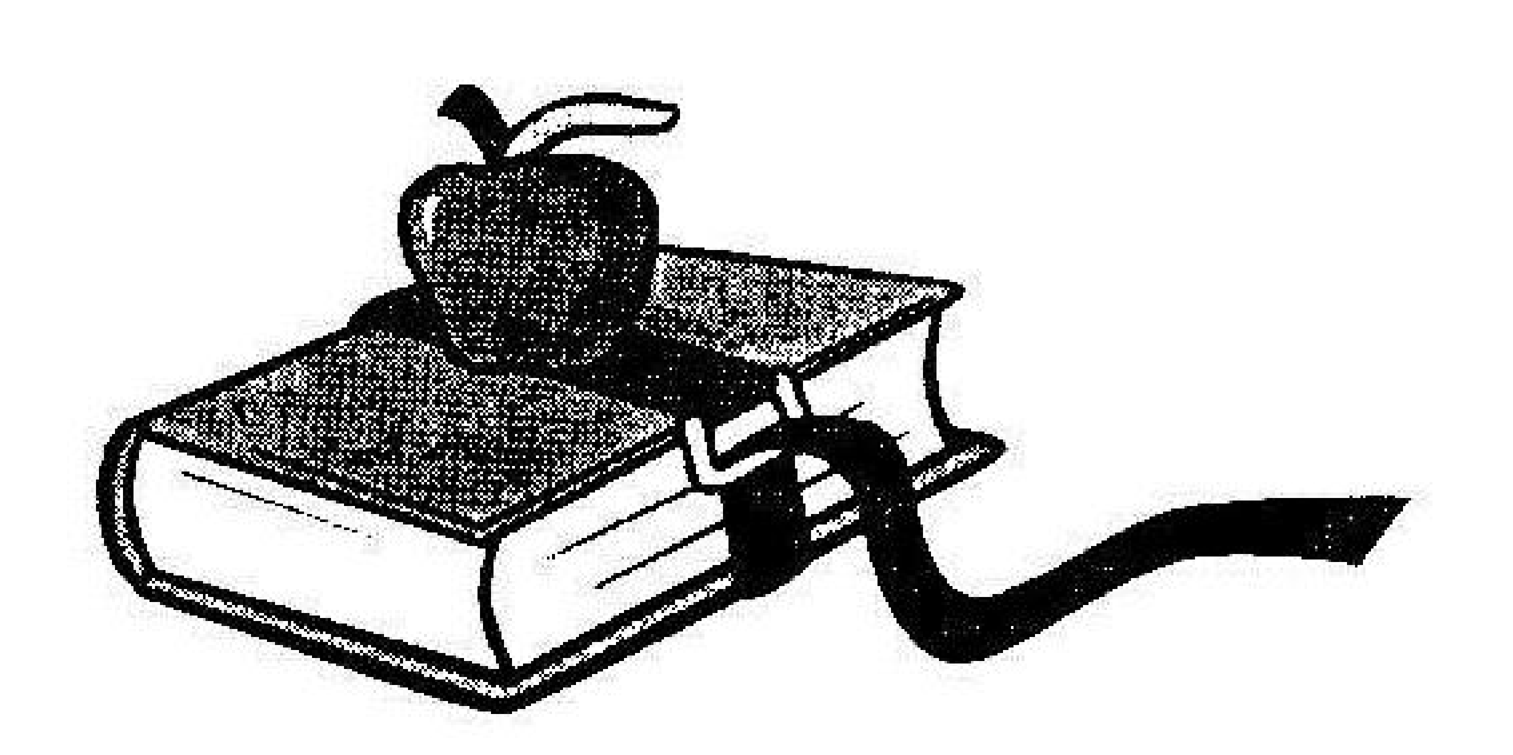
تمرين 35

لعبة يانصيب تحتوي 100 ورقة منها 15 ورقة مربحة وتعطي ربح 1000 دينار و15 ورقة أخرى مربحة وتعطي ربح 5000 دينار .

1- اشترى شخص ورقة . احسب احتمال الحوادث الآتية :

الحادثةA : الشخص لا يربح شيئا .   ب- الحادثةB : الشخص يربح 1000 دينار .   ج- الشخص يربح 5000 دينار .

2- شخص آخر اشترى ورقتين . احسب الاحتمال بأن هذا الشخص يربح على الأقل 2000 دينار .



محتويات الكتيب

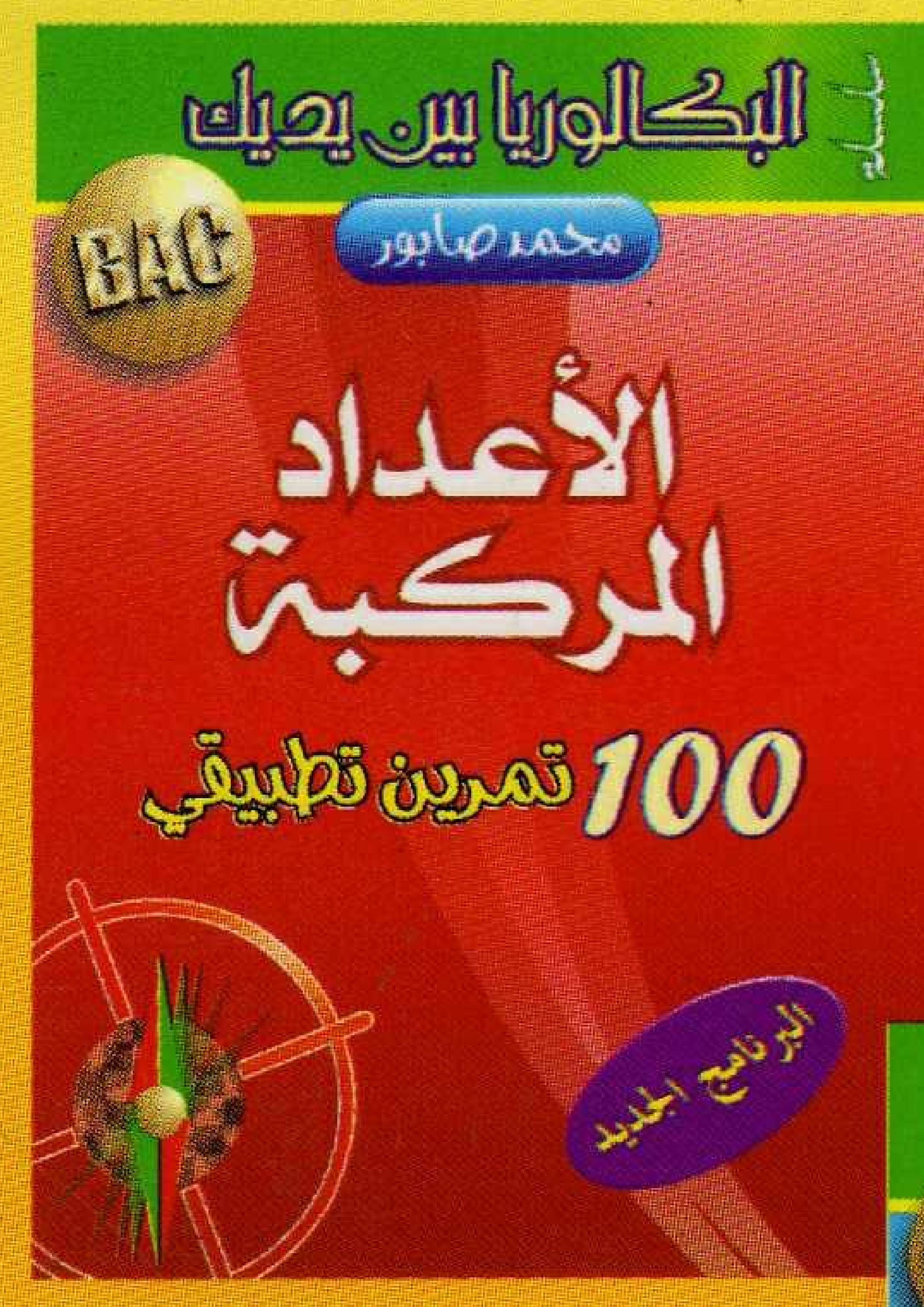
المحور الأول: العــــــــد

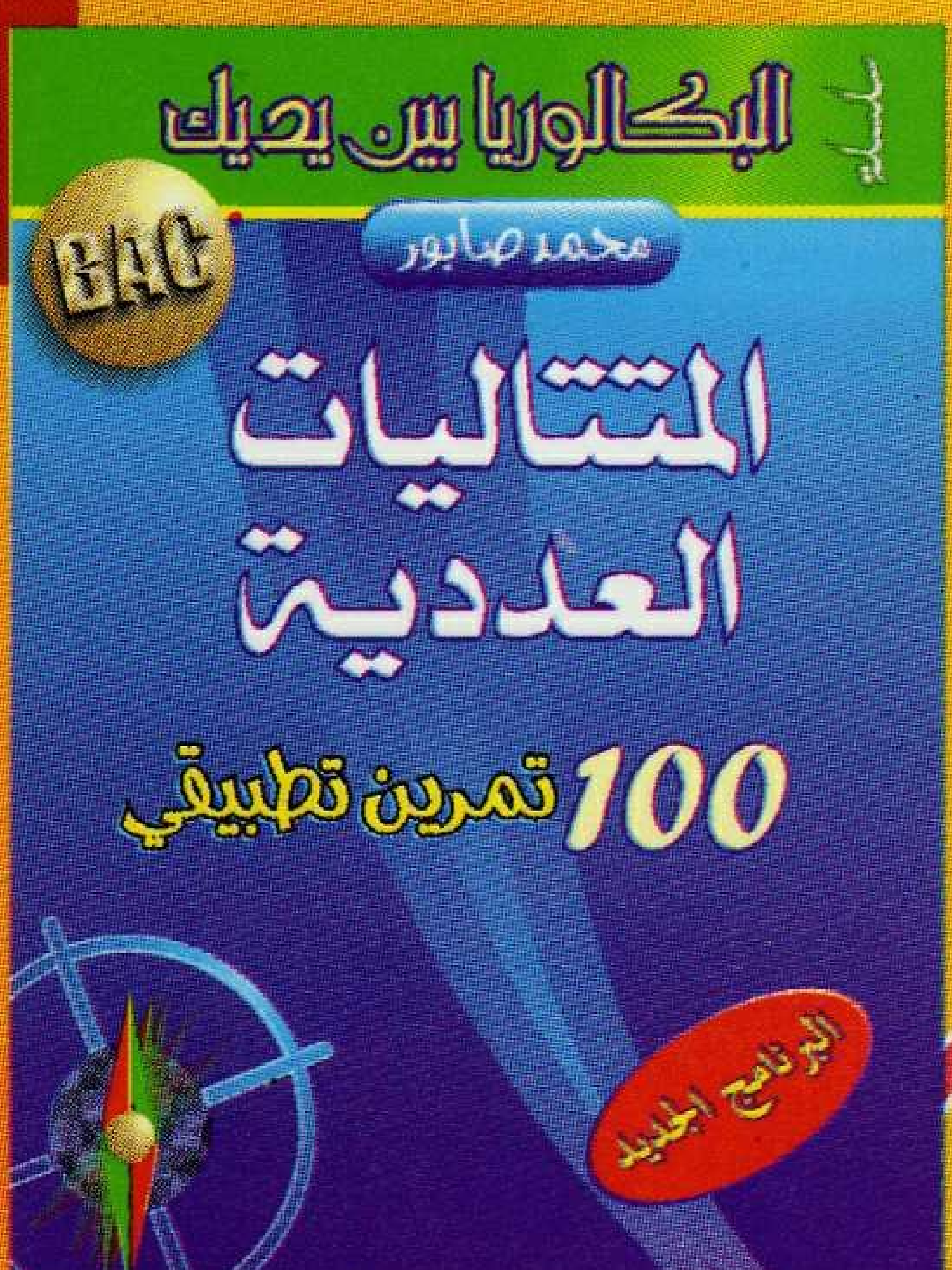
المحور الثاني: الاحتمالات



الأستاذ :
محمد صابور

في نفس السلسلة





ISBN : 978-9947-0-2256-6